e-WYDANIE SPECJALNE

FIZYKA
w Szkole z Astronomią

SSN 0426-3383 NR **2/2026**
Cena 25 zł (w tym 8% VAT)

MECHANIKA NIEBA

i inne wybrane zagadnienia

Marcin Wesołowski

Wybór artkułów drukowanych na łamach "Fizyki w Szkole"

eprasa.pl 0593885dee

WYDANIE SPECJALNE 1/2026

Wersja elektroniczna

Jak fizyka wspiera pracę:

- internisty
- kardiologa
- onkologa
- okulisty
- pulmunologa

PLIK PDF
Cena 25 zł
(w tym 8% VAT)

Także fizyka w:

Tomografii * Spektroskopii jądrowego rezonansu magnetycznego * Elektroterapii * Termoterapii * Światłolecznictwie

Formularz zamówienia i szczegóły na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

eprasa.pl 0593885dee

Drodzy Czytelnicy!

Kiedy przygotowywaliśmy to wydanie specjalne statek kosmiczny Artemis II z czwórką kosmonautów okrążył niewidoczną z Ziemi stronę Księżyca. Była to druga podróż człowieka w okolice Księżyca, jednocześnie najdalsza odległość jaką człowiek pokonał w Kosmosie - wyniosła ona 406 778 kilometrów. Ile jeszcze człowiek ma do pokonania w Kosmosie najlepiej ilustruje fakt, że najbliższa gwiazda względem Ziemi to Słońce, które jest odległe od niej o około 150 mln km, druga z kolei to α Centauri odległa o 4,3 lat świetlnych znajdująca się w gwiazdozbiorze Centaura.

My tymczasem zapraszamy do lektury kolejnego wydania, a w nim na teoretyczne analizy i praktyczne ćwiczenia z ruchu planet, określania ich orbit, obliczania prędkości kosmicznych niezbednych do oderwania się od Ziemi i poruszania się we Wszechświecie.

W rozdziałach "Astronomiczna rachuba czasu" autor przedstawia najważniejsze informacje i pojęcia związane z astronomiczną rachubą czasu. Tam też znajdziecie praktyczne informacje, gdyż autor podaje program, dzięki któremu wylicza terminy Świąt Wielkanocnych do 2050 roku!

W końcowych rozdziałach dowiecie się jak zbiera się informacje o gwiazdach i jak one ewoluują, a jest ich podobno ponad 20 mln.

Józef Szewczyk, wydawca

O AUTORZE

dr hab. **Marcin Wesołowski**,
prof. UR, Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Nauk Ścisłych, Instytut Nauk Fizycznych, Centrum Innowacji i Transferu Wiedzy Techniczno-Przyrodniczej Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Zainteresowania naukowe autora koncentrują się na astrofizyce małych ciał Układu Słonecznego, ze szczególnym uwzględnieniem komet. Główny nurt badań obejmuje ilościową analizę procesów termodynamicznych odpowiedzialnych za emisję materii kometarnej zachodzącą zarówno w warunkach quasi-stacjonarnej sublimacji, jak i podczas wybuchów. Ponadto zakres prowadzonych prac obejmuje pomiary fotometryczne i spektroskopowe wyselekcjonowanych analogów pyłowych, stanowiących modele laboratoryjne składników rzeczywistego pyłu kometarnego, wraz z ich charakterystyką optyczną i fizykochemiczną.

Spis treści

3 **Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba. część I** - Marcin Wesołowski
Oddziaływanie grawitacyjne w klasycznej fizyce zaliczane jest do jednego z czterech fundamentalnych oddziaływań w przyrodzie.

12 **Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba. część II** - Marcin Wesołowski

18 **Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba. część III** - Marcin Wesołowski

26 **Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba. część IV. Zadania 1** - Marcin Wesołowski

30 **Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba. część IV. Zadania 2** - Marcin Wesołowski

36 **Orientacja na sferze niebieskiej. Dobowy ruch sfery niebieskiej** - Marcin Wesołowski

40. **Astronomiczna rachuba czasu. Cz. 1.** - Marcin Wesołowski
Jednym z fundamentalnych problemów astronomii jest astronomiczna rachuba czasu.

46 **Astronomiczna rachuba czasu. Cz. 2.** - Marcin Wesołowski

50 **Wybrane zagadnienia astrofizyki gwiazdowej. Cz. I.** - Marcin Wesołowski
Podstawowym źródłem informacji o gwiazdach jest ich widmo, które charakteryzuje się rozkładem natężenia poszczególnych linii widmowych.

56 **Wybrane zagadnienia astrofizyki gwiazdowej. Cz. II.** - Marcin Wesołowski

62 **Fizyczna ewolucja gwiazd.** - Marcin Wesołowski
Okiem nieuzbrojonym możemy zaobserwować około 6000 gwiazd na obu półkulach ziemskich ze znanych około 20 milionów gwiazd.

Wydawca Agencja AS Józef Szewczyk
ul. Warchałowskiego 2/28, 02-776 Warszawa
Tel. 606 201 244. Mail: szewczyk24@gmail.com
Opracowanie graficzne: Agencja AS
Teksty, fotografie i ilustracje:
Autorzy, Dreamstime, Adobe Stock, Fotolia, Agencja AS, NASA, Wikimedia Commons

Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część I

Foto – Dreamstime

Marcin Wesołowski

Oddziaływanie grawitacyjne w klasycznej fizyce zaliczane jest do jednego z czterech fundamentalnych oddziaływań w przyrodzie. Ruch ciał w Układzie Słonecznym związany jest z polem grawitacyjnym, które w głównej mierze pochodzi od Słońca i planet. Wpływ pozostałych ciał wchodzących w skład Układu Słonecznego (komet, planetoid i materii międzyplanetarnej) w pierwszym przybliżeniu ze względu na ich małą masę w bezpośrednim porównaniu do Słońca i planet możemy pominąć.

Dla uproszczenia naszych rozważań załóżmy, że planety i ich księżyce swoimi kształtami przypominają idealną kulę. W rzeczywistości odchylenia powierzchni tych ciał niebieskich od powierzchni kuli są na tyle małe w porównaniu z odległościami pomiędzy poszczególnymi planetami, że większość rozważanych zagadnień w mechanice naszego układu planetarnego możemy traktować jako opis pola grawitacyjnego pochodzącego od układu punktów materialnych. W tym miejscu przypominamy z klasycznej fizyki, że poprzez punkt materialny rozumiemy ciało fizyczne, które jest obdarzone masą a jego rozmiary są małe, skupione w punkcie, względem którego określamy ruch danego ciała.

Zagadnienie dwóch punktów materialnych

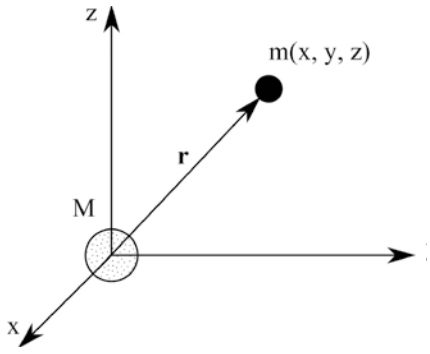
Zagadnieniem dwóch ciał nazywa się ogólnie problemem znalezienia ruchów dwóch punktów materialnych oddziaływujących na siebie siłą centralną. W czasie ruchu w polu sił centralnych, spełniających zasadę akcji i reakcji, zachowuje się całkowity moment pędu układu. W rozważanym tu wypadku dwóch punktów materialnych wnioskujemy, że punkty poruszają się w płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą poprowadzoną przez ich położenia chwilowe oraz przez wektor prędkości względnej. Niezależnie od tego ruchu względnego, który jest ruchem płaskim, cały układ może się przemieszczać dowolnie w przestrzeni ze stałą prędkością.

Rozważmy dwa punkty materialne jeden o masie M a drugi o znacznie mniejszej masie m, które spełniają następującą zależność $m << M$.

Korzystając z prawa grawitacji lub ściślej mówiąc z prawa powszechnego ciążenia możemy przedstawić matematyczne podejście do opisu ruchu planety wokół Słońca. Prawo to możemy wyrazić jako:

$$F_g = \frac{G M m}{r^2}, \tag{1}$$

gdzie F_g jest siłą grawitacji, G jest stałą grawitacji, M jest masą większego ciała np. Słońca, m jest masą mniejszego ciała np. planety, a r jest odległością pomiędzy tymi ciałami.



Rys. 1. Graficzne przedstawienie układu dwóch ciał, przy czym masa większego ciała została umieszczona w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

Załóżmy dla wygody naszych obliczeń, że Słońce i planetę możemy potraktować jako punkty materialne. Dodatkowo wpływ oddziaływania grawitacyjnego pochodzącego od innych ciał niebieskich pomijamy.

W oparciu o prawo grawitacji dane równaniem (1) wartość siły oddziaływania jaką Słońce wywiera na planetę w postaci wektorowej możemy zapisać jako:

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}. \tag{2}$$

Zauważmy, że wartość tej siły jest ujemna, gdyż jest przeciwnie skierowana niż wektor promienia wodzącego **r** (Rys.1). W oparciu o II zasadę dynamiki możemy zapisać:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

Dzięki wprowadzeniu kartezjańskiego układu współrzędnych wektor wodzący **r** możemy rozłożyć na składowe tego wektora: **r** = [x, y, z], oraz przyspieszenie jako drugie jego pochodne względem czasu: $\ddot{a}=[\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}]$. Korzystając bezpośrednio z równania (3) tzn. rozkładając lewą jego stronę na poszczególne składowe przyspieszenia otrzymujemy następujący układ równań (4):

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{x} \\ m\ddot{\mathbf{y}} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{y} \\ m\ddot{\mathbf{z}} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{z} \end{cases} \tag{4}$$

Niech $U=-\frac{GMm}{r}$ oznacza potencjał efektywny, który otrzymujemy całkując równanie (1) po *dr*, a siła $F=-\mathrm{grad}\,U$, czyli $F=-\left[\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right]$.

Zauważmy, że w powyższych zależnościach wykorzystaliśmy pojęcie gradientu (grad), który w układzie współrzędnych jest wektorem, a jego składowe to pochodne cząstkowe danej funkcji.

Rozważmy następujący przykład, niech:

$$\mathbf{F}_x = -\frac{GMm}{r^3}x \tag{5}$$

Obliczmy teraz następujący czynnik:

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{GMm}{\mathbf{r}}\right) = GMm\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mathbf{r}}\right), \tag{6}$$

gdzie $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, wówczas otrzymujemy, że:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}. \tag{7}$$

Pomnóżmy teraz obustronnie układ równań (4) przez pierwszą pochodną (każde równanie ściśle według swojego kierunku), wówczas możemy zapisać:

$$\begin{cases} m\ddot{x}\dot{x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x}\dot{x} \\ m\ddot{y}\dot{y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y}\dot{y}. \\ m\ddot{z}\dot{z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z}\dot{z} \end{cases} \tag{8}$$

W ten sposób uzyskaliśmy układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu, w których zmienną niezależną jest czas.

Dodajmy stronami ostatni układ równań i wtedy otrzymujemy:

$$m\cdot\left(\ddot{x}\cdot\dot{x}+\ddot{y}\cdot\dot{y}+\ddot{z}\cdot\dot{z}\right) = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}\right]. \tag{9}$$

Ponieważ zmienną niezależną był czas, dlatego powyższe równanie obustronnie całkujemy względem czasu:

$$\int m\cdot(\ddot{x}\cdot\dot{x}+\ddot{y}\cdot\dot{y}+\ddot{z}\cdot\dot{z})\,dt = \int -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}\right]dt. \tag{10}$$

Korzystając z następującej zależności, że:

$$\int \ddot{x}\cdot\dot{x}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\dot{x}^2 + C \tag{11}$$

Wynik całkowania równania (10) możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = -\int\frac{dU}{dt}dt. \tag{12}$$

Ostatecznie rozwiązanie to przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = -U + C. \tag{13}$$

Zauważmy, że w równaniu (13) po jego lewej stronie w nawiasie mamy sumę kwadratów prędkości odpowiednio w każdym kierunku, więc równanie to możemy uprościć do następującej postaci:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + U = C, \tag{14}$$

gdzie: C oznacza stałą całkowania. Równanie (14) określane jest jako całka energii i jednocześnie definiuje prawo energii: w układzie izolowanym całkowita energia mechaniczna (suma energii potencjalnej i kinetycznej) jest zachowana (stała). Ponadto całka energii (prawo energii) pozwala obliczyć w dowolnym momencie prędkość *v* ciała, które porusza się po orbicie w polu grawitacyjnym ciała centralnego np. Słońca.

Moment pędu

W mechanice klasycznej moment pędu **K** ciała określamy jako iloczyn wektorowy pędu **p** i wektora wodzącego **r.** Na podstawie tej definicji moment pędu możemy zapisać

jako:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{15}$$

Pomóżmy teraz obustronnie równanie (15) przez czynnik $\frac{d}{dt}$, wówczas otrzymujemy, że:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\cdot\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}\times m\cdot\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_g = m\cdot\underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{v}}_{0}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_g. \tag{16}$$

Zauważmy, że w równaniu (16) wykorzystaliśmy definicję prędkości i pędu ciała oraz uogólnioną postać drugiej zasady dynamiki Newtona. Ponadto z własności iloczynu wektorowego, a dokładniej tabliczki mnożenia wektorowego wynika, że iloczyn wektorowy dwóch tych samych wektorów równy jest tzw. wektorowi zerowemu. Dlatego też równanie (16) możemy przepisać do następującej postaci:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{0} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}_g\,. \tag{17}$$

Pamiętajmy, że wektor zerowy **0** w przestrzeni liniowej pełni rolę elementu neutralnego dodawania wektorów. W oparciu o powyższe założenia oraz zmodfikowaną postać równania (5) mamy:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{0}+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_g = \mathbf{r}\times\left(-\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}\right) = \left(-\frac{GMm}{r^3}\right)\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{r}\,. \tag{18}$$

Następnie zastosujmy tą samą regułę wynikającą z własności iloczynu wektorowego jak w przypadku powyżej. Wówczas otrzymamy, że:

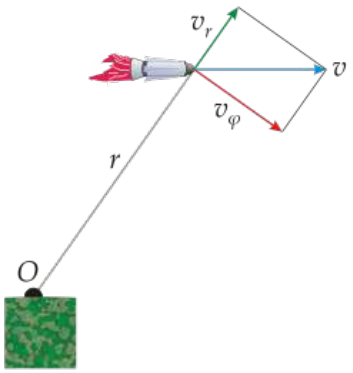
$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{0}\,. \tag{19}$$

Ponieważ moment pędu K jest wektorem stałym a moment pędu jako iloczyn wektorowy jest prostopadły do każdego ze swoich dwóch składników ($\mathbf{K}\perp\mathbf{r}$ oraz $\mathbf{K}\perp\mathbf{v}$) to na podstawie zasady zachowania momentu pędu ruch tego ciała jest płaski tzn. otrzymujemy przypadek dwuwymiarowy x i y.

Traktując ruch rakiety jako przypadek dwuwymiarowy możemy wektor prędkości rozłożyć na dwie składowe radialną i transwersalną prędkości w układzie biegunowym. Wówczas moment pędu jest równy:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}\times m\times\mathbf{V} = m\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{V} = m\cdot\mathbf{r}\times[\mathbf{V}_r+\mathbf{V}_\varphi] \tag{20}$$

W tym miejscu przypomnijmy, że prędkość radialna określa prędkość zmiany długości promienia wodzącego **r**.



Rys. 2. Rozkład prędkości rakiety (niebieska) na składową radialną (zielona) i transwersalną (czerwona) w układzie biegunowym względem obserwatora O. Ponadto zauważmy, że składowa radialna jest prostopadła do składowej transwersalnej.

Prędkość radialną $\mathbf{V}_r$ możemy wyrazić jako:

$$\mathbf{V}_r = \frac{dr}{dt} = r\mathbf{i}_r. \tag{21}$$

gdzie $\mathbf{i}_r$ jest wersorem o kierunku radialnym. Natomiast składowa transwersalna prędkości określa prędkość zmiany położenia w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego **r**. Prędkość transwersalną $\mathbf{V}_\varphi$ możemy zdefiniować jako:

$$\mathbf{V}_\varphi = r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,\mathbf{i}_\varphi = r\cdot\varphi\mathbf{i}_\varphi\,, \tag{22}$$

gdzie $\mathbf{i}_\varphi$ jest wersorem o kierunku prostopadłym do radialnego. W astronomii składowa prędkości transwersalnej określana jest jako prędkość tangencjalna (styczna). Prędkość tangencjalna to składowa prędkości ciała niebieskiego inaczej mówiąc jest to prędkość prostopadła do odcinka łączącego dane ciało niebieskie (obserwowany obiekt) z obserwatorem. Prędkość tą wyznaczamy znając ruch własny (zmiana szybkości pozycji gwiazdy na niebie w funkcji czasu) badanego obiektu i jego odległość od obserwatora.

W oparciu o równania (21-22) równanie (20) możemy zapisać jako:

$$\mathbf{K} = m\cdot\underbrace{\mathbf{r}\times\mathbf{V}_r}_{0}+m\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{V}_\varphi = m\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{V}_\varphi. \tag{23}$$

Wykorzystajmy teraz definicję prędkości transwersalnej, która zdefiniowana jest równaniem (22), wówczas otrzymujemy, że:

$$K = m\cdot r\cdot r\cdot\dot{\varphi} = m\cdot r^2\cdot\dot{\phi} = m\cdot r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{24}$$

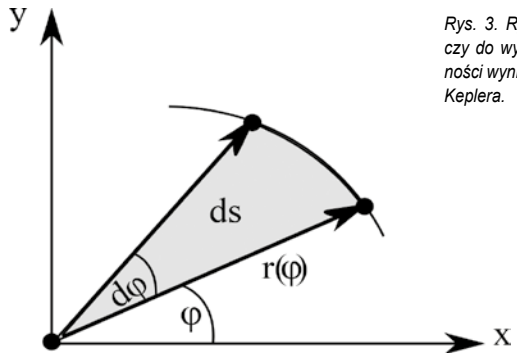
Przekształćmy teraz równanie (24) tak, abyśmy mogli policzyć wyrażenie $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{K}{m\cdot r^2}\,. \tag{25}$$

Wprowadźmy teraz kartezjański układ współrzędnych x, y jak na rysunku 3. Pole powierzchni *ds* możemy obliczyć korzystając z zależności:

$$ds = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}\,dt. \tag{26}$$

Podzielmy teraz obustronnie równanie (26) przez *dt*



Rys. 3. Rysunek pomocniczy do wyznaczenia zależności wynikającej z II prawa Keplera.

wówczas możemy zapisać, że:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}\ . \tag{27}$$

Do równania (27) podstawmy zależność (25) co daje:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{K}{m\cdot r^2}\ . \tag{28}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy, że

$$\frac{ds}{dt}=\frac{K}{2m}\ . \tag{29}$$

Ponieważ wykazaliśmy wcześniej, że moment pędu K jest wielkością stałą, więc zależność (29) też jest wielkością stałą, co możemy zapisać jako:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{K}{2m}=\mathrm{const}. \tag{30}$$

Dodatkowo zależność dana równaniem (30) określa II prawo Keplera – **Prędkość polowa planety w ruchu wokół Słońca jest stała dla danej planety**. Zauważmy, że II prawo Keplera jest bezpośrednią konsekwencją zasady zachowania pędu. Natomiast czynnik $\frac{ds}{dt}$ oznacza prędkość polową danej planety.

Kształt orbity

Dla uproszczenia naszych dalszych rozważań pozostajemy nadal w układzie współrzędnych biegunowych. W układzie tym wartość kwadratu prędkości całkowitej dana jest jako:

$$V^2=V_r^2+V_\phi^2, \tag{31}$$

gdzie tak jak poprzednio V_r jest składową radialną prędkości a V_φ jest składową transwersalną prędkości. Wykorzystując definicje tych dwóch składowych (równania 21-22) możemy zapisać:

$$V^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2. \tag{32}$$

Zauważmy, że w równaniu (32) w drugim członie po jego prawej stronie występuje czynnik $\dot{\varphi}$. Wartość tego parametru (prędkości kątowej ciała) możemy wyrazić poprzez moment pędu K zgodnie z równaniem (25). Wówczas otrzymujemy, że:

$$V^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\cdot\left(\frac{K}{m\cdot r^2}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2. \tag{33}$$

Następnie wykorzystajmy całkę energii (prawo energii) dane równaniem (14), co możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2}m\cdot\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2\right]+U=E. \tag{34}$$

Wykorzystując wcześniejsze założenie, że $U=-\frac{GMm}{r}$ równanie (34) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{1}{2}m\cdot\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2\right]+\left(-\frac{GMm}{r}\right)=E. \tag{35}$$

Niech $\beta=GMm$ wówczas równanie (35) możemy uprościć do następującej postaci:

$$\frac{1}{2}m\cdot\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2\right]-\frac{\beta}{r}=E. \tag{36}$$

Pomnóżmy teraz równanie (36) przez czynnik $\frac{2}{m}$, a wyrażenie $\frac{\beta}{r}$ przenieśmy na drugą stronę wówczas mamy:

$$\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2\right]=\frac{2}{m}\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right). \tag{36}$$

Z równania (36) obliczmy teraz składową radialną prędkości, czyli czynnik $\frac{dr}{dt}$, który po prostych przekształceniach jest równy:

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right)-\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2}. \tag{37}$$

Zauważmy teraz, że słuszna jest następująca relacja:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{K}{m\cdot r^2}. \tag{38}$$

Wówczas równanie (37) przyjmuje postać:

$$\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{K}{m\cdot r^2}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right)-\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2}. \tag{39}$$

Obliczmy następnie z równania (37) czynniki $d\varphi$, który jest równy:

$$d\varphi=\frac{\frac{K}{m\cdot r^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right)-\left(\frac{K}{m\cdot r}\right)^2}}. \tag{40}$$

Zauważmy, że możemy jeszcze uprościć prawą stronę równania (40) poprzez wyciągnięcie z licznika jak i mianowania czynnika $\frac{1}{m}$, co daje:

$$d\varphi = \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{K}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{1}{m^2}\left(\frac{2\cdot E\cdot m^2}{m}+\frac{2\cdot\beta\cdot m^2}{r\cdot m}-\frac{K^2}{r^2}\right)}} = \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{K}{r^2}dr}{\frac{1}{m}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\cdot E\cdot m^2}{m}+\frac{2\cdot\beta\cdot m^2}{r\cdot m}-\frac{K^2}{r^2}\right)}}. \quad (41)$$

Wówczas po uproszczeniu równania (41) mamy:

$$d\varphi = \frac{\frac{K}{r^2}dr}{\sqrt{\left(2\cdot E\cdot m+\frac{2\cdot\beta\cdot m}{r}-\frac{K^2}{r^2}\right)}} = \frac{\frac{K}{r^2}dr}{\sqrt{2\cdot m\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right)-\left(\frac{K}{r}\right)^2}}. \quad (42)$$

W równaniu (42) w liczniku po prawej stronie obliczmy następującą całkę:

$$\int\frac{K}{r^2}dr = -\frac{K}{r}, \quad (43)$$

co daje nam:

$$d\varphi = \frac{-d\left(\frac{K}{r}\right)}{\sqrt{2\cdot m\cdot\left(E+\frac{\beta}{r}\right)-\left(\frac{K}{r}\right)^2}}. \quad (44)$$

Takie podejście pozwala nam rozwiązać zależność (44) za pomocą wzoru wynikającego z rachunku całkowego w następującej postaci:

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{a}\right). \quad (45)$$

W oparciu o równanie (45) zależność (44) dana jest jako:

$$\int d\varphi = \int\frac{-d\left(\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K}\right)}{\sqrt{\left[2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2\right]-\left(\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}}, \quad (46)$$

gdzie stałe a^2 i b^2 występujące w zależności (45) wynoszą odpowiednio: $a^2 = \left[2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2\right]$, $b^2 = \left(\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2$.

W wyniku obliczeń możemy zapisać, że:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K}}{\sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}}\right). \quad (47)$$

Pomnóżmy teraz obustronnie równanie (47) przez funkcję cosinus i jednocześnie pamiętajmy, że $\cos(\arccos(x)) = x$, wówczas mamy:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K}}{\sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}}. \quad (48)$$

Następnie, aby uprościć równanie (48) pomóżmy go obustronnie przez $\sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}$ wówczas możemy zapisać, że:

$$\frac{K}{r}-\frac{m\cdot\beta}{K} = \sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}\cdot\cos\varphi. \quad (49)$$

Dodajmy obustronnie czynnik $\frac{m\cdot\beta}{K}$ do równania (49), wówczas otrzymamy:

$$\frac{K}{r} = \frac{m\cdot\beta}{K}+\sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}\cdot\cos\varphi. \quad (50)$$

Przekształćmy teraz równanie (50) w taki sposób, aby można było obliczyć r, co możemy zapisać jako:

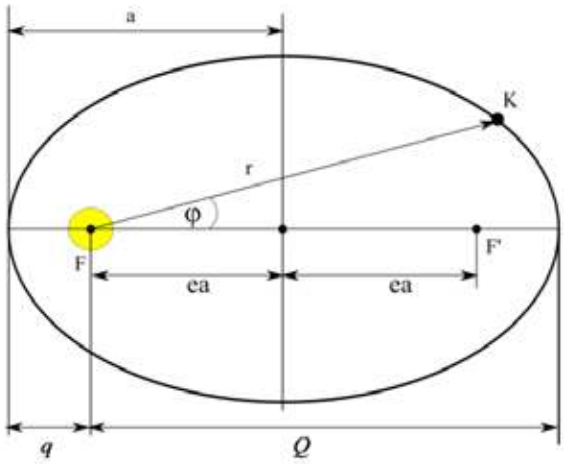
$$r = \frac{K}{\frac{m\cdot\beta}{K}+\sqrt{2\cdot m\cdot E+\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2}\cdot\cos\varphi}. \quad (51)$$

Następnie w mianowniku równania (51) wyłączmy przed nawias czynnik $\frac{m\cdot\beta}{K}$ wówczas otrzymujemy, że:

$$r = \frac{K}{\frac{m\cdot\beta}{K}+\sqrt{\left(\frac{m\cdot\beta}{K}\right)^2\left(\frac{2\cdot m\cdot E\cdot K^2}{m^2\cdot\beta^2}+1\right)}\cdot\cos\varphi} = \frac{K}{\frac{m\cdot\beta}{K}+\frac{m\cdot\beta}{K}\sqrt{\left(\frac{2\cdot E\cdot K^2}{m\cdot\beta^2}+1\right)}\cdot\cos\varphi} = \frac{K}{\frac{m\cdot\beta}{K}\left(1+\sqrt{\left(\frac{2\cdot E\cdot K^2}{m\cdot\beta^2}+1\right)}\right)\cdot\cos\varphi}. \quad (52)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy, że:

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 4. Przykładowa orbita eliptyczna dla komety okresowej. Przyjęto tu następujące oznaczenia: q – peryhelium, Q – aphelium, K – kometa, F, F' – ogniska.

$$r=\frac{\frac{K^2}{m\cdot\beta}}{1+\sqrt{\left(\frac{2\cdot E\cdot K^2}{m\cdot\beta^2}+1\right)}\cdot\cos\varphi}. \qquad (53)$$

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia, niech parametr elipsy będzie równy $p=\frac{K^2}{m\cdot\beta}=a\cdot(1-e^2)$, a mimośród orbity eliptycznej $e=\sqrt{\left(\frac{2\cdot E\cdot K^2}{m\cdot\beta^2}+1\right)}$, wówczas równanie (53) możemy zapisać w prostej postaci jako:

$$r=\frac{p}{1+e\cdot\cos\varphi}=\frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos\varphi}. \qquad (54)$$

Zauważmy, że równanie (54) jest to równanie biegunowe orbity eliptycznej. W przypadku ruchu ciała po orbicie eliptycznej możemy wyróżnić dwa charakterystyczne punkty takie jak: **peryhelium,** czyli punkt, w którym ciało niebieskie (planeta, kometa) znajduje się najbliżej Słońca oraz **aphelium,** czyli punkt największego oddalenia (planety, komety) od Słońca. W trakcie ruchu ciała niebieskiego po orbicie eliptycznej kąt φ będzie zmieniał się w zakresie od 0° (dla peryhelium) do 180° (dla aphelium). Wówczas na podstawie równania (54) mamy:

- dla peryhelium

$$r=\frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos 0}=\frac{a\cdot(1-e)(1+e)}{1+e}=a\cdot(1-e)=q,$$

- dla aphelium

$$r=\frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cdot\cos 0}=\frac{a\cdot(1-e)(1+e)}{1-e}=a\cdot(1+e)=Q.$$

Na rysunku 4 została przedstawiona przykładowa orbita eliptyczna dla komety wraz z zaznaczonymi podstawowymi parametrami orbitalnymi.

Jednocześnie równanie (54) stanowi uogólnienie I prawa Keplera, bowiem w zagadnieniu dwóch ciał, które przyciągają się siłą wynikającą z prawa powszechnego ciążenia, orbita względna każdego z tych ciał jest tzw. przecięciem stożkowym, czyli jest elipsą, kołem, parabolą lub hiperbolą. Oznacza to, że orbita ciała niebieskiego jest w ogólnym przypadku krzywą stożkową, a równanie (54) jest także określane jako równanie stożkowe.

Wówczas możemy sformułować I prawo Keplera, które brzmi:

Planety w Układzie Słonecznym poruszają się po elipsach, a w jednym z ognisk znajduje się Słońce.

Obliczmy jeszcze energię całkowitą *E* korzystając z zależności na kwadrat mimośrodu e^2, co możemy zapisać jako:

$$e^2=\left(\frac{2\cdot E\cdot K^2}{m\cdot\beta^2}+1\right). \qquad (55)$$

Występujący w równaniu moment pędu K możemy obliczyć korzystając z zależności definiującej parametr elipsy:

$$p=\frac{K^2}{m\cdot\beta}=a\cdot(1-e^2). \qquad (56)$$

Wówczas możemy zapisać, że:

$$K^2=m\cdot\beta\cdot a\cdot(1-e^2). \qquad (57)$$

Podstawmy teraz równanie (57) do zależności (55) co możemy wyrazić jako:

$$e^2-1=\frac{2\cdot E}{m\cdot\beta}\cdot\frac{m\cdot\beta\cdot a\cdot(1-e^2)}{1}. \qquad (58)$$

Po uproszczeniu mamy:

$$E=-\frac{\beta}{2\cdot a}, \qquad (59)$$

pamiętając, że $\beta=GMm$ równanie (59) możemy wyrazić jako:

$$E=-\frac{GMm}{2\cdot a}. \qquad (60)$$

Kształt krzywej stożkowej po której porusza się ciało niebieskie zależy od energii *E* i mimośrodu *e*. Wówczas możemy wyróżnić następujące relacje:

- jeżeli mimośród *e* spełnia następującą nierówność: 0 < e < 1 i E<0 to orbita jest elipsą,
- jeżeli mimośród *e* = 1 i E = 0 to orbita jest parabolą,
- jeżeli mimośród *e* > 1 i E > 0 to orbita jest hiperbolą,
- jeżeli mimośród *e* = 0 to orbita jest kołem.

eprasa.pl 0593885dee

Na podstawie pierwszego prawa Keplera wiadomo, że torem ruchu planety jest krzywa zwana elipsą, przy czym Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy. Z punktu widzenia opisu matematycznego elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, których suma odległości od dwóch pozostałych ognisk elipsy jest stała.

Drugie spostrzeżenie Keplera polegało na stwierdzeniu, że planety nie obiegają Słońca z jednakową szybkością, ale poruszają się raz wolniej a raz szybciej: szybciej, kiedy są bliżej Słońca, a wolniej, gdy są dalej.

Przypuśćmy, że obserwujemy położenie planet w dowolnych dwóch chwilach, np. w odstępie tygodniowym i że promień wodzący planety w tym czasie zakreśla pewien fragment łuku orbity, który planeta pokonała w tym czasie. Wówczas oba promienie wychodzące ograniczają pewien płaski obszar. Jeśli po pewnym czasie znów dokonamy obserwacji w takim samym odstępie czasu, ale wówczas, gdy planeta znajdzie się w innej, dalszej od Słońca części orbity okaże się znów, że pole obszaru ograniczonego promieniami wodzącymi i łukiem orbity jest takie samo jak poprzednio.

Okres obiegu planety wokół Słońca możemy zapisać jako:

$$T = \frac{S}{\delta}, \tag{61}$$

gdzie S jest powierzchnią elipsy równą $S = \pi \cdot a \cdot b$, a δ jest prędkością polową, którą możemy zdefiniować jako:

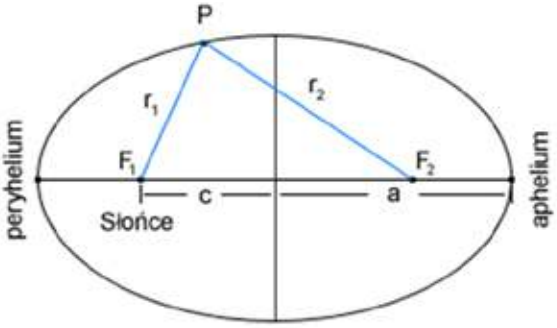
$$\delta = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{r} \times \mathbf{V}| = \frac{K}{2m}. \tag{62}$$

Z właściwości elipsy wiadomo, że: $b = a \cdot \sqrt{1-e^2}$, $p = a \cdot (1-e^2)$. Podnosząc obustronnie do kwadratu równanie (61) na okres obiegu planety wokół Słońca i podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy:

$$T^2 = \frac{S^2}{\delta^2} = \frac{\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{\frac{K^2}{4m^2}} = \frac{\pi^2 \cdot a^4 \cdot (1-e^2)}{\frac{K^2}{4m^2}}. \tag{63}$$

Na podstawie powyższych rozważań możemy zapisać, że:

$$K^2 = m\beta p, \quad \beta = GMm, \quad p = a(1-e^2). \tag{64}$$



Rys. 5. Rysunek pomocniczy do wykazania słuszności III prawa Keplera.

Korzystając z równań (63) i (64) możemy zapisać:

$$T^2 = \frac{\pi^2 \cdot a^4 \cdot (1-e^2)}{\frac{K^2}{4m^2}} = \frac{\pi^2 \cdot a^4 \cdot (1-e^2)}{\frac{GMm^2 a \cdot (1-e^2)}{4m^2}}. \tag{65}$$

Po redukcji otrzymamy, że:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \cdot a^3,$$

lub

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} = \text{const}.$$

W ten sposób została wykazana słuszność III prawa Keplera dla orbity eliptycznej. Zauważmy, że powyższe zagadnienie na potrzeby rachunków wykonanych w szkole można nieco uprościć, przyjmując za założenie, że ciało niebieskie (planeta, kometa) porusza się po okręgu. Wówczas w celu wykazania słuszności III prawa Keplera wystarczy rozpatrzenie relacji tożsamościowo równej pomiędzy siłą grawitacji i siłą dośrodkową, która utrzymuje ciało na linii toru (na linii okręgu).

III prawo Keplera brzmi:

Stosunek kwadratów okresu obiegu planet wokół Słońca do sześcianu jej dużej półosi jest wielkością stałą, która jest równa $\frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$.

Literatura:

[1] Rybka, E., 1976, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa.
[2] Borkowski, K. M., 1991, Astronomiczne obliczenia nie tylko dla geografów, UMK Toruń.
[3] Artymowicz, P. 1995, Astrofizyka układów planetarnych, Wyd. Naukowe PWN.
[4] Stodółkiewicz J. S., 1978, Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki, PWN Warszawa.
[5] Kreiner, J. M., 1988, Astronomia z astrofizyką, PWN Warszawa.

NOWE! WYDANIE SPECJALNE 1/2023

WERSJA ELEKTRONICZNA – PLIK PDF

194

POJĘĆ I TERMINÓW
z astronomii i astrofizyki
od ACHERNER
po ZIEMIĘ

Cena 20 zł
w tym 8% VAT

Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część II

Foto – Dreamstime

W pierwszej części rozważań związanych z mechaniką nieba zostało przedstawione między innymi zagadnienie dwóch punktów materialnych oraz na tej podstawie przedstawiono wyprowadzenie trzech prawa Keplera. Kontynuując dalsze rozważania w drugiej części rozpoczynamy również od praw Keplera ale w nieco innym podejściu.

Marcin Wesołowski

Rozpatrujemy wzajemne oddziaływanie planety o masie *m* i Słońca o masie *M*. Ponieważ *m* << *M*, więc Słońce praktycznie nie „odczuwa" oddziaływania grawitacyjnego planety. Dlatego też, jeśli z jego środkiem zwiążemy układ współrzędnych, to możemy uważać go za inercjalny. Jeśli w tym układzie *r* oznacza promień wodzący planety, to równanie jej ruchu przyjmie postać:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

Całkowanie równania ruchu (1) można znaleźć w każdym podręczniku mechaniki teoretycznej. Przedstawiona w tym artykule metoda będzie nieco inna niż klasyczne rozwiązanie tego zagadnienia. Schemat ten nie wymaga całkowania równania ruchu, lecz wykorzystamy następujące dwie tożsamości, które zostały wyrażone poprzez dwa równania (2-3):

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{2}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \tag{3}$$

Zauważmy, że dowody powyższych dwóch twierdzeń zaliczane są do klasycznej teorii wektorów i tensorów, które można znaleźć np. w podręczniku Karaśkiewicza „Zarys teorii wektorów i tensorów" PWN, Warszawa, 1976. Zresztą równości te łatwo dowieść, jeśli pamiętamy o tym, że:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \mathbf{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \mathbf{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right), \tag{4a}$$

oraz:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{4b}$$

Potrzebna nam będzie jeszcze jedna tożsamość, którą możemy wyrazić jako:

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = r\cdot\dot{r}. \tag{4c}$$

Zauważmy że tożsamość (4c) jest oczywista, jeśli $\dot{r}$ oznacza składową $\dot{\mathbf{r}}$ w kierunku wektora **r**. Pomnóżmy teraz obustronnie równanie (1) przez następującą zależność $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ i wykorzystajmy następującą relację, że:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{r^3}\frac{dr}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,. \tag{4d}$$

Wówczas równanie (1) możemy zapisać jako:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} + GMm\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = 0 \tag{5}$$

Co dalej daje nam:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt}\left[GMm\left(\frac{1}{r}\right)\right] = 0 \tag{6}$$

eprasa.pl 0593885dee

Teraz łatwo już zauważyć, że z równania (6) wynika:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = \text{const} = E \tag{7}$$

W ten sposób otrzymaliśmy prawo zachowania całkowitej energii mechanicznej układu.

Łatwo również dowieść, że moment pędu **K** planety również nie zmienia się w czasie. W tym celu na podstawie rozważań przedstawionych w pierwszej części artykułu możemy zapisać, że:

$$\mathbf{K} = m\cdot\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{8}$$

Skoro mamy dowieść, że moment pędu **K p**lanety również nie zmienia się w czasie to musimy wykazać słuszność następującej zależności $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{0}$. Zauważmy, że po prawej stronie tej zależności występuje tzw. wektor zerowy. W tym miejscu należy pamiętać, że wektor zerowy **0** w przestrzeni liniowej pełni rolę elementu neutralnego dodawania wektorów. Wówczas mamy:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} + m\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0 + m\mathbf{r}\times\left(-\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}\right) = \mathbf{0}$$

Zatem **K** = const, a co wynika z równania (8) wektor K jest prostopadły do płaszczyzny ruchu, co oznacza że mamy do czynienia z ruchem płaskim.

Następnie sprawdźmy czy wektor **C,** który został zdefiniowany równaniem (9) jest słały, co oznacza, że $\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{K} - GMm\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{9}$$

W tym celu przeprowadźmy następujące rozważania:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{C}}{dt} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{K} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d\mathbf{K}}{dt} - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right) - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= -\frac{GMm}{r^3}\left[\mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right) - \dot{\mathbf{r}}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\right)\right] + \left[-GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right]\\
&= -\frac{GMm}{r^3}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\cdot\dot{r} - \dot{\mathbf{r}}\cdot r^2\right) - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= +\frac{GMm}{r^2}\left(\dot{\mathbf{r}}\cdot r - \mathbf{r}\cdot\dot{r}\right) - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= GMm\frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot r - \mathbf{r}\cdot\dot{r}}{r^2} - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{9b}$$

Na podstawie powyższych rozważań możemy zauważyć, że wektory **K** i **C** są stałe, tzn. mają stały kierunek oraz wartość. Trzy wielkości fizyczne E, **K** i **C** jednoznacznie określają orbitę ciała o masie *m*.

Wyznaczmy teraz zależność na K^2, co możemy zrobić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
K^2 &= m\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)\cdot\mathbf{K} = m\mathbf{r}\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{K}\right) = m\mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{C} + GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= m\mathbf{C}\cdot\mathbf{r} + GMm^2 r.
\end{aligned} \tag{9c}$$

Zauważmy, że w tożsamości (9c) został wykorzystany warunek pochodzący z równania (9):

$$\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{K} = \mathbf{C} + GMm\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{9d}$$

Dlatego też ostatecznie zależność (9c) dana jest jako:

$$K^2 = mCr\cos\varphi + GMm^2 r \tag{10}$$

Podzielmy teraz obustronnie równanie (10) przez czynnik GMm^2 wówczas otrzymujemy:

$$\frac{K^2}{GMm^2} = \frac{Cr\cos\varphi}{GMm} + r. \tag{10a}$$

Następnie zauważmy, że po prawej stronie równania (10a) możemy parametr *r* wyciągnąć przed nawias, co daje nam:

$$\frac{K^2}{GMm^2} = r\cdot\left(\frac{C\cos\varphi}{GMm} + 1\right). \tag{10b}$$

Z równania (10b) łatwo wykazać że *r* dane jest jako:

$$r = \frac{\frac{K^2}{GMm^2}}{\left(\frac{C}{GMm}\cdot\cos\varphi + 1\right)}. \tag{10c}$$

Uwzględniając wyniki otrzymane w pierwszej części łatwo zauważyć, że zależność (10c) jest określana jako równanie określające krzywą stożkową typu:

$$r = \frac{p}{\left(1 + e\cdot\cos\varphi\right)}, \tag{10d}$$

gdzie: *p* jest parametrem elipsy, a *e* jest jej mimośrodem. Ponadto zauważmy, że w równaniu (10d) skorzystaliśmy z prawa przemienności dodawania.

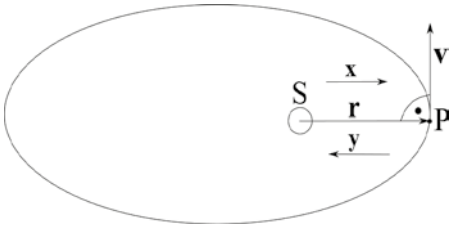
Skoro wektory **C** i **K** są stałe, więc można obliczyć ich wartość w dowolnym punkcie orbity. Najłatwiej jest to zrobić w peryhelium (bo wtedy bez względu na to, czy orbita jest elipsą, parabolą czy hiperbolą) ponieważ w tym punkcie wektor prędkości **v** jest prostopadły do wektora **r** (**v** ⊥ **r**). Wówczas moment pędu K i całkowita energia mechaniczna dane są jako:

$$\begin{aligned}
K &= mrv,\\
E &= \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Schematycznie stwierdzenie to możemy przedstawić na rysunku (1):

Następnie ponownie wykorzystajmy równanie (9) oraz powyższe założenia:

eprasa.pl 0593885dee



*Rys. 1. Ruch planety P w peryhelium jej orbity. Pozostałe symbole oznaczają: S – Słońce, **v** – wektor prędkości linowej, r – odległość Słońca do planety w peryhelium jej orbity.*

$$\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{K} - GMm\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{K} - GMm\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{12}$$

Zauważmy, że wektory zaznaczone na rys. 1: $\mathbf{x} = \mathbf{v} \times \mathbf{K}$ i $\mathbf{y} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r}$ są antyrównoległe, co oznacza, że ich kierunki są identyczne a zwroty są przeciwne. Wówczas wektor $\mathbf{C}^2$ możemy obliczyć jako:

$$\begin{aligned} C^2 &= \left(mrv^2 - GMm\right)^2 = m^2r^2v^4 - 2GMm^2v^2r + \left(GMm\right)^2 \\ &= m^2r^2v^2\left(v^2 - \frac{2GM}{r}\right) + \left(GMm\right)^2 \\ &= \left(GMm\right)^2 + K^2 \cdot \frac{2E}{m}, \end{aligned} \tag{13}$$

czyli ostatecznie mamy:

$$C = \sqrt{\left(GMm\right)^2 + \frac{2K^2E}{m}}. \tag{14}$$

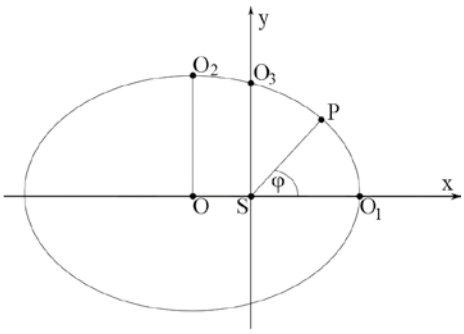
Zatem wszystkie występujące wielkości E, K, C można wyznaczyć za pomocą warunków początkowych – prędkości i położenia. Dlatego na podstawie tych warunków możemy wyznaczyć orbitę planety, jeśli:

- e < 1 – orbita jest elipsa,
- e = 1 – orbita jest parabolą,
- e > 1 – orbita jest hiperbolą.

Zauważmy, że o wartości mimośrodu decyduje wartość energii E. Jeżeli E < 0, jest to elipsa, gdy E = 0 – parabola, gdy E > 0 – hiperbola, co wynika ze wzoru.

$$e = \frac{C}{GMm} = \sqrt{1 + \frac{2K^2E}{G^2M^2m^3}}. \tag{15}$$

Dla wszystkich planet E<0 i dlatego poruszają się one po elipsach – w ten sposób zostało udowodniono I prawo Keplera.



Rys. 2. Przykładowa orbita keplerowska. Poszczególne symbole oznaczają: S – Słońce, P – planeta, O – środek elipsy, OO_1 = a – duża oś elipsy, OO_2 = b – mała oś elipsy, OS = c, e = ca^{-1}, SO_3 = p, p = $a(1-e^2)$.

Zauważmy, że możemy również mimośród orbity eliptycznej wyrazić jako iloraz odległości ogniska S od środka elipsy O przez długość dużej osi elipsy:

$$e = \frac{OS}{a} = \frac{c}{a}. \tag{16}$$

Drugie prawo Keplera wynika bezpośrednio z faktu, iż wektor **K**= const.

$$K = |K| = |r \times m \cdot v| = m|r \times v| = 2m \cdot S_o, \tag{17}$$

gdzie S_o jest polem, jakie zakreśla promień wodzący w jednostce czasu (jak na rys.3). Dlatego też prędkość polowa jest równa:

$$S_o = \frac{K}{2m} = \text{const.} \tag{18}$$

Trzecie prawo Keplera można udowodnić następująco. Niech T oznacza okres obiegu planety po orbicie eliptycznej, wówczas:

$$T = \frac{S}{S_o} = \frac{2mS}{K}, \tag{19}$$

gdzie S oznacza pole powierzchni elipsy. Podnosząc równanie (19) do kwadratu i pamiętając o tym, że pole powierzchni elipsy jest równe $S = \pi \cdot a \cdot b$, gdzie a i b oznacza dużą i małą półoś elipsy. Dodatkowo wykorzystamy jeszcze parametr elipsy, który możemy wyrazić jako:

$$p = a\left(1 - e^2\right) = \frac{K^2}{GMm^2}. \tag{20}$$

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4m^2S^2}{K^2} = \frac{4m^2\pi^2a^2b^2}{GMm^2a\left(1-e^2\right)} = \frac{4\pi^2ab^2}{GM\left(1-e^2\right)} \\ &= \frac{4\pi^2a^3\left(1-e^2\right)}{GM\left(1-e^2\right)} = \frac{4\pi^2a^3}{GM}, \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie: $b = a\sqrt{(1-e^2)}$. Ostatecznie możemy zapisać, że:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}. \tag{22}$$

Zauważmy, że równanie (22) określane jest jako matematyczna postać III prawa Keplera. Wykorzystując powyższe rozważania przeprowadźmy dwa elementarne dowody odpowiednio dla energii E oraz momentu pędu K

Dowód dla energii:

W tym celu wykorzystamy równanie (15):

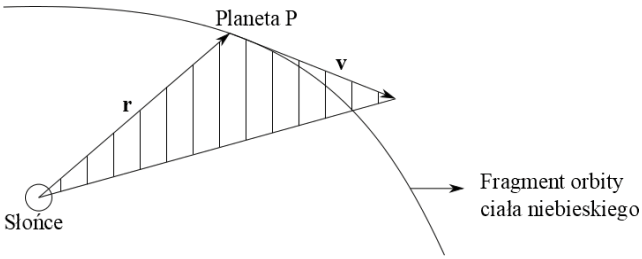
$$e = \sqrt{1 + \frac{2K^2E}{G^2M^2m^3}}. \tag{23}$$

Podnieśmy do kwadratu równanie (23) wówczas mamy:

$$e^2 - 1 = \frac{2K^2E}{G^2M^2m^3}. \tag{24}$$

Zauważmy, że w równaniu (24) po jego prawej stronie występuje kwadrat momentu pędu K^2, który możemy wyrazić poprzez parametr elipsy *p* na podstawie zależności

eprasa.pl 0593885dee



Rys.3. Ilustracja służąca do wyprowadzenia zależności opisującej II prawo Keplera.

(20), co możemy zapisać jako:

$$e^2 - 1 = \frac{2Epm^2GM}{G^2M^2m^3}. \tag{25}$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$e^2 - 1 = \frac{2Ep}{GMm}, \tag{26}$$

gdzie parametr *p* ponownie na podstawie zależności (20) jest równy: $p = a\left(1 - e^2\right)$. Wówczas równanie (26) jest równe:

$$e^2 - 1 = \frac{2Ea\left(1 - e^2\right)}{GMm}. \tag{27}$$

Na podstawie równania (27) łatwo można pokazać, że:

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \tag{28}$$

Dowód na pęd:

Skorzystajmy w tym miejscu z następującego równania:

$$p = \frac{K^2}{GMm^2}. \tag{29}$$

Wówczas kwadrat momentu K^2 pędu wynosi:

$$K^2 = pGMm^2. \tag{30}$$

Postępując w analogiczny sposób jak w dowodzie na energię możemy zapisać, że: $p = a\left(1 - e^2\right)$, wówczas pęd wynosi:

$$K = \sqrt{pGMm^2} = \sqrt{a\left(1 - e^2\right)GMm^2}$$
$$= m\sqrt{a\left(1 - e^2\right)GM}. \tag{31}$$

Na podstawie równań (28) i (31) możemy zauważyć, że wartość energii zależy od dużej pół osi *a* orbity eliptycznej, a moment pędu zależy zarówno od dużej pół osi *a* orbity eliptycznej jak i od jej mimośrodu *e*.

Prędkości kosmiczne

W mechanice nieba prędkości kosmiczne (prędkości ucieczki) oznaczają minimalne prędkości, które należy nadać satelicie, aby dzięki energii kinetycznej mógł on pokonać grawitację pochodzącą od ciała macierzystego. Wyróżniamy cztery prędkości kosmiczne:

Pierwsza prędkość kosmiczna V_I dla kulistego obiektu kosmicznego jest to prędkość jaką należy nadać w kierunku poziomym małemu ciału (np. satelicie) aby krążyło po orbicie kołowej tuż nad powierzchnią rozważanego obiektu kosmicznego (np. planety (Ziemi)).

Wyprowadzenie równania na pierwszą prędkości kosmiczną uwzględnia następującą zależność, że siła grawitacji spełnia rolę siły dośrodkowej i nadaje satelicie przyspieszenie dośrodkowe oczywiście podczas ruchu po orbicie kołowej. Wówczas na podstawie II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać, że:

$$\frac{GmM_Z}{R_Z^2} = \frac{mV_I^2}{R_Z}, \tag{32}$$

gdzie G jest stałą grawitacji ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$), m jest masą satelity, M_Z jest masą Ziemi ($M_Z = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg), a R_Z jest promieniem (promieniem równikowym Ziemi, $R_Z = 6378{,}137$ km). Ponadto zauważmy, że satelita porusza się tuż nad powierzchnią planety (np. Ziemi) więc możemy przyjąć że $R \approx R_Z$.

Po prostych przekształceniach równania (32) otrzymujemy, że:

$$V_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = 7902.71\frac{m}{s} \approx 7.9\frac{km}{s}. \tag{33}$$

Druga prędkość kosmiczna V_{II} to prędkość jaką należy nadać satelicie, aby mógł on pokonać grawitację ciała macierzystego i na zawsze opuścić to ciało. Oznacz to, że satelita będzie poruszał się ruchem swobodnym, a jego tor ruchu będzie krzywą stożkową otwartą (parabolą lub hiperbolą). Wyznaczając wartość drugiej prędkości kosmicznej porównany energię satelity znajdującego się nad powierzchnią ciała macierzystego z energią w nieskończoności. Zauważmy, że im większa odległość R tym mniejsza jest energia. Oznacza to, że jeśli odległość R dąży do nieskończoności to energia satelity będzie dążyć do zera. Zatem sumaryczna energia (kinetyczna i potencjalna) też musi być bliska zeru lub nawet wynosić zero. Wówczas możemy zapisać, że:

$$\frac{mV_{II}^2}{2} + \left(-\frac{GM_Z m}{R_Z}\right) = 0. \tag{34}$$

Wówczas po prostych przekształceniach równania (34) mamy:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2} \cdot V_I.$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych otrzymujemy poszukiwaną wartość drugiej prędkości kosmicznej:

$$V_{II} = \sqrt{2} \cdot 7.9\frac{km}{s} \approx 11.18\frac{km}{s}. \tag{35}$$

Zauważmy, że druga prędkość kosmiczna bywa także nazywaną prędkością ucieczki. Równanie na drugą prędkość kosmiczną (prędkość ucieczki) możemy również wyprowadzić poprzez zastosowanie wybranych elementów analizy matematycznej.

Załóżmy, że *G* to stała grawitacji, *M* to masa Ziemi lub innego ciała niebieskiego, a *m* to masa ciała które ucieka. Wówczas w odległości *R* od środka ciężkości na ciało działa siła przyciągania grawitacyjnego:

eprasa.pl 0593885dee

$$F = \frac{GMm}{R^2}. \tag{36}$$

Pracę jaką należy wykonać, aby ciało przesunąć o niewielką odległość *dR* wbrew sile grawitacji dana jest jako:

$$dW = F \cdot dR = \frac{GMm}{R^2} \cdot dR. \tag{37}$$

Z równania (37) należy obliczyć całkowitą pracę którą należy wykonać aby ciało przesunąć z odległości R_0 do nieskończoności (∞), zatem możemy zapisać, że:

$$W = \int_{R_0}^{\infty} \frac{GMm}{R^2} \cdot dR. \tag{38}$$

Następnie wykorzystajmy jedną z podstawowych własności rachunku całkowego mówiącą o tym, że stały czynnik występujący w funkcji podcałkowej możemy wyłączyć przed znak całki, wówczas mamy:

$$W = GMm \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{R^2} \cdot dR. \tag{39}$$

Teraz została nam już do obliczenia prosta całka oznaczona w oparciu o wzór wynikający z rachunku całkowego:

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{R^2} \cdot dR = \int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^2} = -\frac{1}{R}\Big|_{R_0}^{\infty} = -\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0} - \left(-\frac{1}{R_0}\right) = \frac{1}{R_0}. \tag{40}$$

Wykorzystując równania (37-40) otrzymujemy, że:

$$W = GMm \cdot \frac{1}{R_0} = \frac{GMm}{R_0}. \tag{41}$$

Aby wykonać pracę w nieskończoności energia kinetyczna ciała musi być równa wykonanej pracy.

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{GMm}{R_0}. \tag{42}$$

Wówczas prędkość ucieczki wynosi:

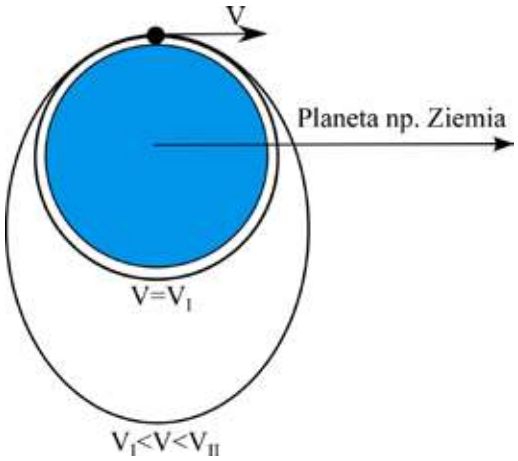
$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}. \tag{43}$$

Dodatkowo możemy w tym miejscu wykorzystać definicję przyspieszenia grawitacyjnego *g*:

$$g = \frac{GM}{R_0^2}, \tag{44}$$

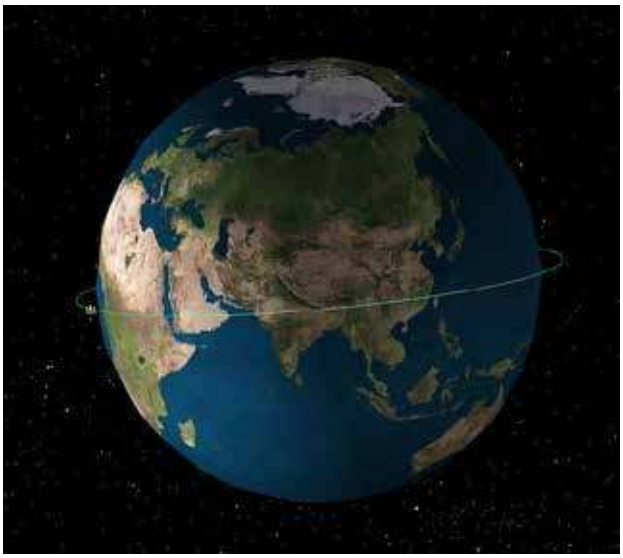
Wówczas prawą stronę równania (41) możemy wyrazić jako: $W = \frac{GMm}{R_0} = mgR_0$. W takim przypadku prędkość ucieczki dana jest następującą zależnością:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} = \sqrt{2gR_0}. \tag{45}$$



Rys.4. Kształt dwóch przykładowych trajektorii dla ciała oraz zależności pomiędzy prędkościami kosmicznymi.

Trzecia prędkość kosmiczna V_{III} to prędkość którą należy nadać satelicie aby mógł on opuścić Układ Słoneczny. Minimalna wartość trzeciej prędkości kosmicznej wynosi V_{III} = 16.7 km·s^{-1} i związana jest z ruchem obiegowym Ziemi wokół Słońca. Natomiast **czwarta prędkość kosmiczna V_{IV}** to prędkość, którą należy nadać satelicie aby mógł on opuścić Galaktykę czyli w naszym przypadku Drogę Mleczną. Minimalna wartość czwartej prędkości kosmicznej wynosi V_{IV} = 330 km·s^{-1} i związana jest z ruchem Słońca dookoła środka Galaktyki.



Rys. 5. Orbita teleskopu Hubble'a (Foto. NASA).

Literatura:

[1] Rybka, E., 1976, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa.
[2] Borkowski, K. M., 1991, Astronomiczne obliczenia nie tylko dla geografów, UMK Toruń.
[3] Artymowicz, P. 1995, Astrofizyka układów planetarnych, Wyd. Naukowe PWN.
[4] Stodółkiewicz J. S., 1978, Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki, PWN Warszawa.
[5] Kreiner, J. M., 1988, Astronomia z astrofizyką, PWN Warszawa.
[6] Wesołowski M., 2023, Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część II, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 1, str. 44-50.

eprasa.pl 0593885dee

WYDANIE SPECJALNE *FIZYKI W SZKOLE*

WERSJA ELEKTRONICZNA – PLIK PDF

- ✓ **Jak to się zaczęło?**
- ✓ **Co to są wielkie pęki?**
- ✓ **Promieniowanie kosmiczne a fizyka cząstek elementarnych**
- ✓ **Promieniowanie kosmiczne a życie na Ziemi**
- ✓ **Zapomniani odkrywcy**
- ✓ **W poszukiwaniu Wyspy Stabilności**

Cena 25 zł
(w tym 8% VAT)

Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

eprasa.pl 0593885dee

Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część III

W trzeciej części rozważań związanych z mechaniką nieba przedstawione zostały dwa zagadnienia – równanie Keplera oraz ograniczone kołowe zagadnienie trzech punktów materialnych.

Marcin Wesołowski

W mechanice nieba równanie Keplera definiuje relację pomiędzy anomalią średnią a anomalią mimośrodową dla orbity eliptycznej. W tym miejscu wyjaśnijmy dwa ważne pojęcia, które wykorzystaliśmy do zdefiniowania równania Keplera.

Anomalia średnia (M) jest określana jako parametr kątowy, który wykorzystujemy do opisu ruchu ciała niebieskiego po jego orbicie keplerowskiej wiążącej położenie z czasem. Anomalię tą możemy wyrazić jako:

$$M = n\left(t - t_0\right), \tag{1}$$

gdzie M jest anomalią średnią (wyrażaną w radianach), n – jest tzw. ruchem średnim $\left(n = 2\pi \cdot T^{-1}\right)$, t jest czasem dla którego obliczamy anomalię, t_0 – to moment przejścia ciała przez perycentrum, czyli jeden z dwóch skrajnych punktów dla orbity eliptycznej, T jest okres orbitalnym, który możemy wyznaczyć na podstawie III prawa Keplera. Warto zauważyć, że anomalię średnią możemy określić jako kąt, który opisuje położenie punktu poruszającego się ze stałą prędkością kątowa *n* po okręgu opisanym na orbicie.

Anomalię mimośrodową (E) definiujemy jako parametr, który opisuje ruch ciała po orbicie keplerowskiej. Inaczej mówiąc anomalia mimośrodowa to kąt pomiędzy odcinkiem łączącym geometryczny środek orbity z perycentrum, a odcinkiem łączącym geometryczny środek orbity z punktem wyznaczonym przez przecięcie prostej prostopadłej do linii apsyd, przechodzącej przez ciało i okrąg opisanym na orbicie.

W celu wyprowadzenia wzoru określającego równanie Keplera rozważmy następującą sytuację, która została przedstawiona na rysunku (1).

Korzystając z rysunku (1) możemy wyznaczyć następujące zależności.

Niech odcinek |FP'| = x, a odcinek |PP'| = y wówczas mamy:

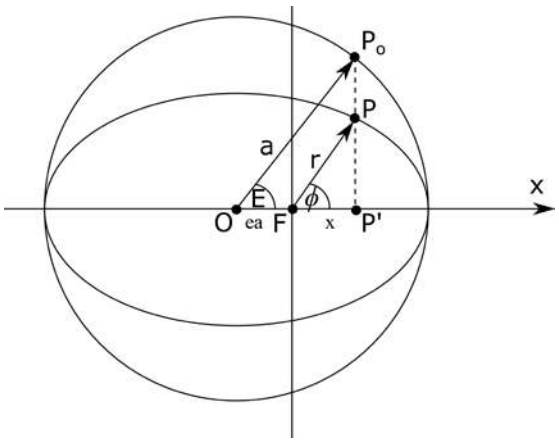
$$x = r \cdot \cos\varphi, \tag{2}$$

$$y = r \cdot \sin\varphi. \tag{3}$$

Następnie niech odcinek $|P'P_o|$ = a · sin E, a odcinek |OP'| = $a \cdot \cos E$ oraz:

$$|OP'| = |OF| + |FP'| = e \cdot a + x, \tag{4}$$

$$x = |OP'| - e \cdot a = a \cdot \cos E - e \cdot a. \tag{5}$$



Rys.1. Elementy elipsy: a – półoś wielka, O – środek elipsy, F – ognisko, w którym znajduje się ciało centralne np. Słońce (zauważmy, że w takim przypadku jest spełnione I prawo Keplera), φ – anomalia prawdziwa, E – anomalia mimośrodowa).

eprasa.pl 0593885dee

stąd wynika, że:

$$x = |OP'| - e \cdot a = a \cdot \cos E - e \cdot a. \tag{5}$$

Zauważmy, że równanie (5) jest równoważne następującej zależności:

$$x = a \cdot (\cos E - e). \tag{6}$$

Następnie wykorzystajmy równanie biegunowe elipsy, które zostało wyprowadzone w pierwszej części rozważań zwianych z mechaniką nieba. Równanie to możemy zapisać jako:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\varphi}, \tag{7}$$

gdzie p jest parametrem elipsy, który możemy wyrazić jako: $p = a \cdot (1 - e^2)$, wówczas równanie biegunowe elipsy możemy przepisać do następującej postaci:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\varphi}. \tag{8}$$

Korzystając z równania (7) po jego prostych przekształceniach parametr elipsy p wynosi:

$$p = r(1 + e \cdot \cos\varphi) = r + r \cdot e \cdot \cos\varphi. \tag{9}$$

Następnie na podstawie równania (2) oraz zależności: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, równanie (9) możemy wyrazić jako:

$$p = r + r \cdot e \cdot \frac{x}{r} = r + e \cdot x. \tag{10}$$

Podstawmy teraz do równania (10) równanie (6):

$$p = r + e \cdot a \cdot (\cos E - e). \tag{11}$$

Przekształćmy równanie (11) w taki sposób, aby można było wyznaczyć parametr r, co możemy zapisać jako:

$$r = p - e \cdot a \cdot (\cos E - e) = a \cdot (1 - e^2) - e \cdot a \cdot (\cos E - e). \tag{12}$$

Po uproszczeniu prawej strony równania (12) mamy:

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E). \tag{13}$$

Wykorzystując powyższe rozważania obliczmy jeszcze długość odcinka |PP'| = y. W tym celu wykorzystamy rysunek (1) oraz twierdzenie Pitagorasa wówczas mamy:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{14}$$

Po podstawieniu do równania (14) równania (13) i (6) otrzymujemy:

$$y = \sqrt{a^2 \cdot (1 - e \cdot \cos E)^2 - a^2 \cdot (\cos E - e)^2}. \tag{15}$$

Wykonajmy proste operacje matematyczne, które możemy zapisać w następujące formie:

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \sqrt{[1 - e + \cos E \cdot (1 - e)] \cdot [1 + e - \cos E \cdot (1 + e)]}, \\ y &= a \cdot \sqrt{(1 - e) \cdot (1 + \cos E) \cdot (1 + e) \cdot (1 - \cos E)} \\ y &= a \cdot \sqrt{(1 - e^2) \cdot (1 - \cos^2 E)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Ostatecznie równanie (16) na podstawie własności $(1 - \cos^2 E) = \sin^2 E$ dane jest jako:

$$y = a \cdot \sin E \cdot \sqrt{1 - e^2}. \tag{17}$$

Wyznaczmy teraz moment pędu korzystając z następującej zależności:

$$p = \frac{K^2}{GMm^2}. \tag{18}$$

Dla uproszczenia rozważań załóżmy, że m = 1kg, wówczas równanie (18) jest równe:

$$p = \frac{K^2}{GM}, \tag{19}$$

stąd już łatwo wykazać, że moment pędu K jest równy:

$$K^2 = p \cdot G \cdot M = G \cdot M \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right), \tag{20}$$

lub

$$K = \sqrt{G \cdot M \cdot a \cdot \left(1 - e^2\right)}. \tag{21}$$

Następnie wykorzystajmy definicję momentu pędu K określoną poprzez iloczyn wektorowy promienia wodzącego **r** i prędkości **V:**

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \tag{22}$$

Zauważmy, że w równaniu (22) ponownie przyjęliśmy, że m = 1 kg. Ponieważ rozważamy przypadek dwuwymiarowy wektor prędkości **v** należy rozłożyć na jego składowe odpowiednio w kierunku x i y. Aby wyznaczyć wartość prędkości z równań (6) i (17) należy obliczyć pochodną:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot (\cos E - e), \\ \dot{x} &= -a \cdot \dot{E} \cdot \sin E, \end{aligned} \tag{23}$$

oraz

$$\begin{aligned} y &= a \cdot \sqrt{1 - e^2}\, \sin E, \\ \dot{y} &= a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \dot{E} \cdot \cos E. \end{aligned} \tag{24}$$

Wówczas moment pędu K jest równy:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \right| \\ &= \mathbf{i}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y & 0 \\ \dot{y} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{j}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & 0 \\ \dot{x} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \\ &= |x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}|. \end{aligned} \tag{25}$$

Wykorzystując zależności (23) i (24) moment pędu **K** wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}| \\ &= \left| \underbrace{\left(a \cdot (\cos E - e)\right)}_{x} \cdot \underbrace{\left(a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \dot{E} \cdot \cos E\right)}_{\dot{y}} + \underbrace{\left(a \cdot \sqrt{1 - e^2}\, \sin E\right)}_{y} \cdot \underbrace{\left(-a \cdot \dot{E} \cdot \sin E\right)}_{\dot{x}} \right|. \end{aligned} \tag{26}$$

eprasa.pl 0593885dee

Zauważmy, że w sumie po prawej stronie równania (26) znajduje się czynnik a·a = a^2, który możemy wyłączyć przed moduł wówczas mamy:

$$K = a^2 \cdot |(\cos E - e)\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot\dot{E}\cdot\cos E + \sin^2 E\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot\dot{E}|$$
$$= a^2\cdot\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}\left|(\cos E - e)\cdot\cos E + \sin^2 E\right|$$
$$= a^2\cdot\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}\,|\cos^2 E - e\cdot\cos E + \sin^2 E|. \qquad (27)$$

Czyli ostatecznie moment pędu K dany jest jako:

$$K = \dot{E}\cdot a^2\cdot\sqrt{1-e^2}\,|1-e\cdot\cos E|. \qquad (28)$$

Zauważmy, że na podstawie powyższych rozważań otrzymaliśmy dwa równania, w oparciu o które możemy wyznaczyć moment pędu. Porównajmy teraz równanie (21) z równaniem (28) co możemy wyrazić jako:

$$\sqrt{G\cdot M\cdot a\cdot\left(1-e^2\right)} = \dot{E}\cdot a^2\cdot\sqrt{1-e^2}\,|1-e\cdot\cos E|, \qquad (29)$$

lub

$$\sqrt{G\cdot M\cdot a}\cdot\sqrt{1-e^2} = a^2\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot\dot{E}\cdot(1-e\cdot\cos E). \qquad (30)$$

Aby uprościć równanie (30) możemy podzielić je obustronnie przez czynnik $\sqrt{1-e^2}$ co daje nam:

$$\sqrt{G\cdot M\cdot a} = a^2\cdot\dot{E}\cdot(1-e\cdot\cos E). \qquad (31)$$

Następnie wykonując dalsze upraszczanie podzielmy równanie (31) przez a^2 oraz czynnik $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$ wówczas otrzymujemy, że:

$$\frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}} = (1-e\cdot\cos E)\frac{dE}{dt}. \qquad (32)$$

Następnie równanie (32) scałkujemy obustronnie co możemy zapisać jako:

$$\int_0^E (1-e\cdot\cos E)\,dE = \int_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}}\,dt.$$

Wykorzystując proste wzory oraz podstawowe twierdzenia wynikające z analizy matematycznej a konkretniej z rachunku całkowego równanie (32) możemy przepisać do następującej postaci:

$$E - e\cdot\sin E = \frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}}\left(t-t_0\right). \qquad (33)$$

Zauważmy, że równanie (33) określane jest w literaturze jako szósta (VI) i ostatnia całka równania ruchu dla zagadnienia dwóch punktów materialnych. Inaczej równanie to określane jest jako równanie Keplera.

Przyjmijmy, że t_0 = 0 wówczas równanie (33) nieco się upraszcza do postaci:

$$E - e\cdot\sin E = \frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}}\,t, \qquad (34)$$

lub

$$E - e\cdot\sin E = n\,t, \qquad (35)$$

gdzie $n = \frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}}$ - średni ruch dzienny, wartość tą otrzymujemy dokonując porównania siły grawitacji i siły dośrodkowej dla ruch po okręgu:

$$m\,\omega^2\,a = \frac{GMm}{a^2}. \qquad (36)$$

Po elementarnych przekształceniach można pokazać, że:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{\sqrt{GM}}{a^{3/2}} = n. \qquad (37)$$

Wykorzystując równania (1) oraz (35) równanie Keplera możemy zapisać jako:

$$E - e\cdot\sin E = M. \qquad (38)$$

Najprościej mówiąc rozwiązanie równania Keplera umożliwia znalezienie ciała na jego orbicie.

Jeżeli mamy do czynienia z ruchem po orbicie eliptycznej musimy podać sześć elementów określających jednoznacznie położenie orbity tego ciała w przestani kosmicznej:

- Wielka półoś orbity (a) wyrażona w jednostkach astronomicznych.
- Mimośród elipsy (e), który jednocześnie odpowiada za jej kształt.
- Nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki (i, inklinacja), czyli kąt dwuścienny między płaszczyzną orbity a płaszczyzną ekliptyki. Jeżeli spełniona jest zależność 0<i<90° to mówimy, że kierunek ruchu ciała niebieskiego (np. planety) jest prosty. Natomiast w przypadku, gdy: 90° < i <180° to mówimy, że kierunek ruchu jest wsteczny.
- Długość węzła wstępującego (Ω), czyli długość ekliptyczna przecięcia punktu orbity z ekliptyką, w którym szerokość ekliptyczna ciała niebieskiego (np. planety) zmienia się z ujemnej w dodatnią. Zauważmy, że inklinacja (i) i długość węzła wstępującego (Ω) określają położenie orbity ciała niebieskiego w przestrzeni kosmicznej.
- Odległość peryhelium od węzła wstępującego (ω), czyli kąt zawarty między promieniem wodzącym ciała niebieskiego (np. planety) znajdującego się w peryhelium i linia węzłów. Odległość ta jest wyznaczana od węzła wstępującego w kierunku ruchu planety w płaszczyźnie orbity. Parametr ten określa położenie wielkiej osi elipsy eliptycznej w płaszczyźnie jej orbity.
- Moment przejścia przez peryhelium (T_0). Parametr ten wiąże położenie ciała niebieskiego (np. planety) na orbicie z czasem.

W przypadku orbity parabolicznych (a->∞) zamiast wielkiej półosi używa się odległości peryhelium od Słońca:

$$q = \frac{|c'|^2}{2\mu}, \qquad (39)$$

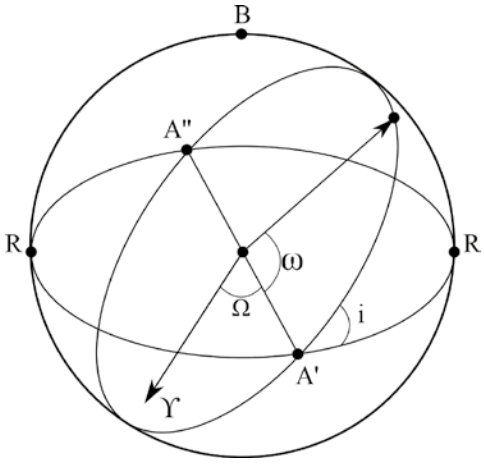
eprasa.pl 0593885dee

gdzie c' i μ są odpowiednimi stałymi wynikającymi z zagadnienia dwóch punktów materialnych.

Zauważmy, że elementy orbity (a, e, i, Ω, ω, T_0) to funkcje jedynie pierwszych całek, które są niezmienne w czasie, jeżeli zaniedbamy zakłócenia, czyli perturbację wywołane oddziaływaniem grawitacyjnym planet. W ogólnym przypadku parametry te zmieniają się bardzo wolno, dlatego też w dowolnej chwili możemy je wyznaczyć korzystając z konfiguracji planet. W przypadku orbity planetarnych perturbacje są niewielkie. Jednakże w przypadku małych ciał niebieskich np. komet lub planetoid, które w swym ruchu przechodzą relatywnie blisko planet np. gazowego olbrzyma – Jowisza ich orbity mogą ulegać znacznym zmianom. Inaczej mówiąc (upraszczając nieco) możemy stwierdzić, że Jowisz jest w stanie zakrzywić pierwotne tory ruchu małych ciał.

Jednakże zwykle do określenia położenia ciała na jego orbicie eliptycznej używa się innych posiadających prosty sens geometryczny parametrów zwanych z elementami orbity:

- węzeł wstępujący (A'),
- węzeł zstępujący (A''),
- peryhelium (π, q),
- nachylenie płaszczyzny orbity do płaszczyzny ekliptyki (i),
- długość węzła wstępującego (Ω),
- odległość peryhelium od węzła wstępującego (ω),



Rys. 2. Elementy orbity.

W celu wyznaczenia sześciu elementów orbity musimy obserwacyjnie określić sześć liczb, które determinują położenie i ruch ciała na sferze niebieskiej. Możemy to uczynić dokonując obserwacji rektascensji α i deklinacji δ w trzech różnych chwilach. Jednakże należy pamiętać, że wyznaczone elementy orbitalne mogą być obarczone błędami obserwacyjnymi. Dlatego też warto porównać wartość rektascensji i deklinacji z tabelami dostępnymi w Almanachu Astronomicznym lub danymi udostępnionymi w astronomicznych bazach danych.

Rozwiązanie równania Keplera

Aby rozwiązać równanie Keplera należy zastosować dwa podejścia. Pierwsze podejście stanowią metody numeryczne (np.: metoda iteracji prostej, metoda Newtona, metoda połowienia), a drugie to metoda graficzna. Poniżej dla przykładu przestawiamy drugie podejście. W tym celu musimy wykonać następujące kroki:

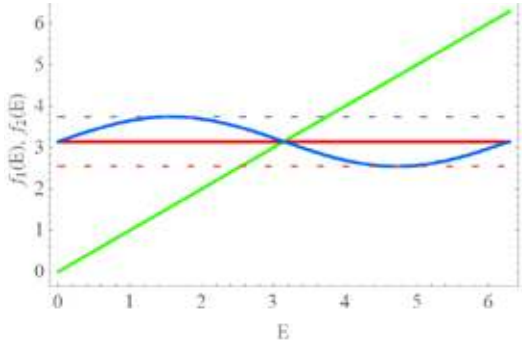
1. Przekształćmy teraz równanie (38) w taki sposób, aby po jego lewej stronie znajdowała się anomalia mimośrodowa (E):

$$E = M + e \cdot \sin E. \tag{39}$$

2. Rozwiązaniem graficznym równania Keplera będzie punkt przecięcia dwóch anomalii mimośrodowych M i E, które wyrazimy za pomocą dwóch funkcji:

$$f_1(E) = E, \quad f_2(E) = M + e \cdot \sin(E). \tag{40}$$

3. Następnie przyjmując, że mimośród orbity eliptycznej e = 0.6 oraz niech M = π, wówczas otrzymujemy:



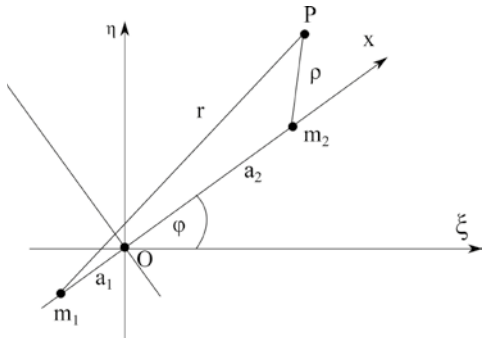
Rys. 3. Graficzne rozwiązanie równanie Keplera – linią zieloną oznaczano funkcję $f_1(E)$ a niebieską $f_2(E)$. Zauważmy, że równanie Keplera ma jedno rozwiązanie znajdujące się w punkcie przecięcia dwóch funkcji $f_1(E)$ i $f_2(E)$.

Ograniczone kołowe zagadnienie trzech punktów materialnych

Zakładamy, że ciała m_1 i m_2 mają masę skończoną i poruszają się wokół wspólnego środka masy tym samym realizując zagadnienie dwóch punktów materialnych. Zauważmy, że trzecie ciało nie wpływa na ruch ciał m_1 i m_2, natomiast ciała o masach m_1 i m_2 wpływają na ruch ciała o masie m_3.

Dla uproszczenia rozważań wprowadźmy układ inercjalny (rys. 4), w którym będziemy rozpatrywać omawiane zagadnienie.

Z rysunku 4 łatwo można zauważyć, że słuszna jest następująca relacja:



Rys. 4. Układ inercjalny opisujący zagadnienie trzech ciał. Współrzędne poszczególnych punktów dane są jako: $m_1(\xi_1,\eta_1,0)$; $m_2(\xi_2,\eta_2,0)$.

eprasa.pl 0593885dee

$$a = a_1 + a_2, \tag{41}$$

gdzie a_1 jest odległością od ciała o masie m_1 do początku układu o współrzędnych O(η, ξ), a a_2 jest odległością od punktu o współrzędnych O(η, ξ) do ciała o masie m_2. Na podstawie powyższych własności słuszne są następujące równania:

$$\xi = x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi,\ \eta = x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi,\ \zeta = z \tag{42}$$

Korzystając z zależności (42) obliczmy teraz pochodne po czasie, czyli tak naprawdę składowe prędkości odpowiednio w danym kierunku, co możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \dot{x}\cdot\cos\varphi - x\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi - \dot{y}\cdot\sin\varphi - y\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi,\\
\dot{\eta} &= \dot{x}\cdot\sin\varphi + x\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi + \dot{y}\cdot\cos\varphi - y\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi,\\
\dot{\zeta} &= \dot{z}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Następnie możemy obliczyć energię kinetyczną, dla której założyliśmy, że masa = 1 kg. Wówczas mamy:

$$T = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\dot{\xi}\right)^2 + \left(\dot{\eta}\right)^2 + \left(\dot{\zeta}\right)^2\right]. \tag{44}$$

Zauważmy, że po prawej stronie równania (44) występuje suma kwadratów prędkości składowych, które wyraziliśmy poprzez równanie (43). Wykorzystując równania (43) oraz (44) mamy:

$$\begin{aligned}
2T &= \left(\dot{x}\right)^2\cdot\cos^2\varphi + x^2\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\sin^2\phi + \left(\dot{y}\right)^2\cdot\sin^2\varphi\\
&+ y^2\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot\dot{x}\cdot x\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\\
&- 2\cdot\dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi - 2\cdot\dot{x}\cdot y\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos^2\varphi\\
&+ 2\cdot x\cdot\dot{y}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot x\cdot y\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\\
&+ 2\cdot\dot{y}\cdot y\cdot\dot{\varphi}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \left(\dot{x}\right)^2\cdot\sin^2\varphi\\
&+ x^2\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\cos^2\varphi + \left(\dot{y}\right)^2\cdot\cos^2\varphi\\
&+ y^2\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot\dot{x}\cdot x\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\\
&+ 2\cdot\dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi - 2\cdot\dot{x}\cdot y\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin^2\varphi\\
&+ 2\cdot x\cdot\dot{y}\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot x\cdot y\cdot\left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\\
&- 2\cdot\dot{y}\cdot y\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \left(\dot{z}\right)^2\\
&= \left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2 + 2\cdot\dot{\varphi}\cdot x\cdot\dot{y}\\
&- 2\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{x}\cdot y + \left(\dot{\varphi}\right)^2\cdot(x^2 + y^2).
\end{aligned} \tag{45}$$

Ostatecznie równanie (45) możemy przepisać do postaci:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\left[\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2\right] + \dot{\varphi}\cdot\left(x\cdot\dot{y} - \dot{x}\cdot y\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}\right)^2\cdot(x^2 + y^2).
\end{aligned} \tag{46}$$

Wykorzystajmy teraz równanie Lagrange'a, które możemy zapisać jako:

$$\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{47}$$

gdzie $L = T - U$, $T = T(\dot{q}_i, q_i)$, $U = U(q_i)$. Następnie zauważmy, że:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(T - U\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{48}$$

Wykorzystując powyższe równania mamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0. \tag{49}$$

Wykorzystując równanie (49) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{50}$$

Natomiast z równania (50) wynika, że:

$$U = -k^2\cdot\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{\rho}\right), \tag{51}$$

gdzie U oznacza energię potencjalną. Inaczej mówiąc U to funkcja sił, czyli energia potencjalna z przeciwnym znakiem. Stąd mamy:

$$U = k^2\cdot\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{\rho}\right). \tag{52}$$

Ponownie wykorzystajmy równanie (50), ale pamiętajmy o zmianie znaku:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{53}$$

Równanie (53) możemy teraz przepisać uwzględniając zmienną x, wówczas otrzymamy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{54}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\cdot\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\cdot\dot{z}^2 + \dot{\varphi}\cdot x\cdot\dot{y} - \dot{\varphi}\cdot\dot{x}\cdot y\\
&+ \frac{1}{2}\cdot\dot{\varphi}^2\cdot(x^2 + y^2).
\end{aligned} \tag{55}$$

eprasa.pl 0593885dee

Wówczas na podstawie równania (54) oraz (55) musimy wyznaczyć dwie następujące zależności:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dot{\varphi} \cdot y, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \dot{\varphi} \cdot \dot{y} + x \cdot \left(\dot{\varphi}\right)^2. \tag{56}$$

Wówczas równanie Lagrange'a po zmiennej x przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x} - \ddot{\varphi} \cdot y - \dot{\varphi}\,\dot{y}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \ddot{x} - \ddot{\varphi} \cdot y - 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{y} - x \cdot \left(\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{57}$$

Następnie dla zmiennej y mamy:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \dot{\varphi} \cdot x, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -\dot{\varphi} \cdot \dot{x} + y \cdot \left(\dot{\varphi}\right)^2. \tag{58}$$

Wówczas równanie Lagrange'a dane jest jako:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \ddot{y} + \ddot{\varphi} \cdot x + \dot{\varphi}\,\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \ddot{y} + \ddot{\varphi} \cdot x + \dot{\varphi}\,\dot{y} - \dot{\varphi}\,\dot{x} - y \cdot \left(\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{59}$$

Natomiast po zmiennej z mamy:

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{60}$$

W ten sposób uzyskaliśmy równania Lagrange'a drugiego rodzaju w postaci układu trzech równań różniczkowych drugiego rzędu. Dla uproszczenia dalszych rozważań ograniczymy się do koła wówczas mamy, że: $\dot{\varphi} = n = \text{const}, \ddot{\varphi} = 0$. Wówczas powyższe trzy równania różniczkowe drugiego rzędu możemy przepisać w uproszczonej postaci:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2 \cdot n \cdot \dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + n^2 \cdot x, \\ \ddot{y} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + n^2 \cdot y, \\ \ddot{z} = +\dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases} \tag{61}$$

Chcąc bardziej uprościć układ równań dany wzorem (61) wprowadźmy pewne uogólnienie, które zdefiniujemy jako:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot (x^2 + y^2) + U. \tag{62}$$

gdzie na podstawie równania (62) możemy zapisać, że:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = n^2 \cdot x + \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} = n^2 \cdot y + \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases} \tag{63}$$

Wówczas układ równań różniczkowych dany wzorem (61) uprasza się do postaci:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2 \cdot n \cdot \dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} - 2 \cdot n \cdot \dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases} \tag{63}$$

Następnie pomnóżmy obustronnie każde z tych równań ściśle według swojego kierunku przez: $2\dot{x}, 2\dot{y}, \text{oraz}\, 2\dot{z}$.

W następnym kroku dodajmy stornami do siebie te równania wówczas otrzymamy, że:

$$2 \cdot \left(\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}\right) = 2 \cdot \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \dot{z}\right], \tag{64}$$

lub

$$2 \cdot (\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}) = 2\frac{d\Omega}{dt}. \tag{65}$$

Pomnóżmy teraz równanie (65) obustronnie przez dt oraz wykonamy obustronne całkowanie wówczas otrzymamy, że:

$$\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2 = 2 \cdot \Omega - C, \tag{66}$$

gdzie C jest stałą całkowania. Jednocześnie lewa strona równania (66) określa nam kwadrat potencjału. Wówczas równanie (66) możemy wyrazić jako:

$$V^2 = 2 \cdot \Omega - C. \tag{67}$$

Na podstawie równania (67) możemy rozważyć dwa następujące przypadki:

a) jeżeli $V \geq 0$ to: $2 \cdot \Omega - C \geq 0$ lub $2 \cdot \Omega \geq C$.
b) jeżeli V=0 to: $2 \cdot \Omega - C = 0$ lub $2 \cdot \Omega = C$ – powierzchnia zerowej prędkości (powierzchnia Hilla).

Wykorzystując równanie (67) wraz z przypadkiem, że V=0 oraz równanie opisujące energię potencjalną (51) mamy:

$$n^2 \cdot (x^2 + y^2) + 2 \cdot k^2 \cdot \left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{\rho}\right) = C, \tag{68}$$

eprasa.pl 0593885dee

jeśli założymy, że: $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; 1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ oraz n = 1, a = 1, to $k^2 \cdot (m_1 + m_2) = n^2 \cdot a^3 = 1$.

Wówczas otrzymamy, że:

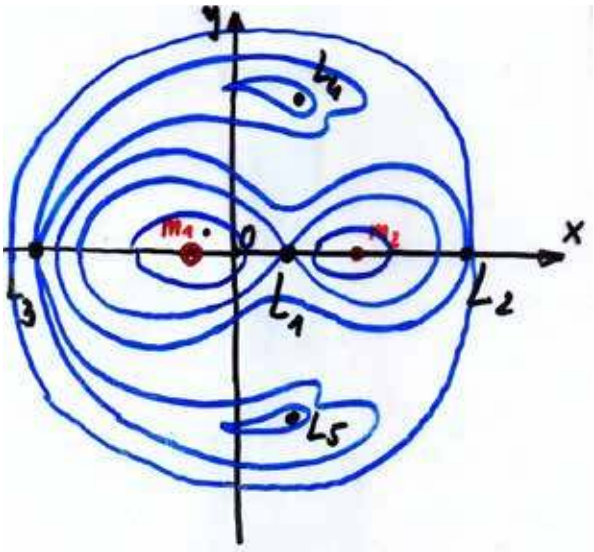
$$k^2 \cdot m_1 = 1 - \mu, \quad k^2 \cdot m_2 = \mu, \tag{69}$$

to równanie (68) możemy zapisać w nieco prostszej postaci jako:

$$x^2 + y^2 + \frac{2 \cdot (1 - \mu)}{r} + \frac{2 \cdot \mu}{\rho} = C. \tag{70}$$

Zauważmy, że równanie (70) opisuje krzywe graniczne Hilla. W astrofizyce powszechnie używana jest nazywa powierzchni Roche'a, jednakże są one synonimami tylko wtedy, gdy potencjał grawitacyjny gwiazdy zostanie przybliżony potencjałem punktu materialnego. Kształty tych powierzchni zależy od stałej Jacobiego.

Jeżeli po prawej stronie w punkcie o masie m_2 znajduje się np. Ziemia to strefa Hilla w tym przypadku znajduje się pomiędzy punktami L1 i L2, czyli punktami Lagrange'a,



Rys. 5. Schemat opisujący całki Jacobiego lub efektywnego potencjału układu dwóch ciał spowodowanego grawitacją i siłą odśrodkową w jednym punkcie w czasie. Granice sfery Hilla są oznaczone czerwonymi liniami otaczającymi dwie duże masy (m_1 i m_2).

które leżą wzdłuż linii łączącej środki obu ciał. Obszar wpływu mniejszego ciała jest najkrótszy w tym kierunku, a zatem działa jako czynnik ograniczający rozmiar sfery Hilla. Powyżej tej odległości trzeci obiekt na orbicie wokół małego obiektu spędziłby przynajmniej część swojej orbity poza sferą Hilla i byłby stopniowo zakłócany przez siły pływowe ciała centralnego (np. Słońca).

Poprzez strefę Hilla należy rozumieć pewien obszar otaczający dane ciało niebieskie (np. planetę), w którym jego przyciąganie grawitacyjne dominuje nad przyciąganiem innego ciała (większego obiektu) znajdującego się w niedalekiej odległości (np. gwiazdy – Słońca). Zauważmy, że w literaturze strefa Hilla określana jest również jako: strefa Roche'a, granica Roche'a lub promień Roche'a.

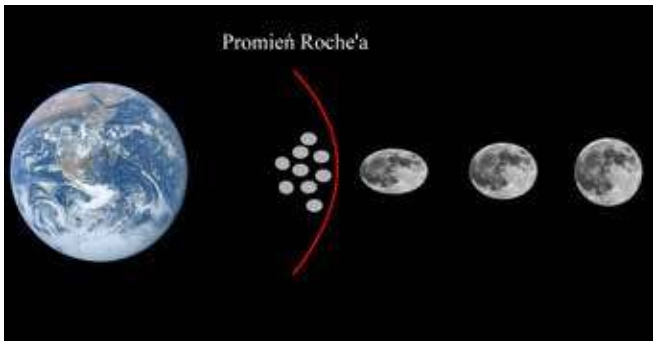
Promień Roche'a to promień sfery wokół cięższego ciała w układzie dwóch ciał, których masy znacząco różnią się (np. masa Słońca i masa Ziemi), po przekroczeniu którego ciało o mniejszej masie może się rozpaść pod wpływem sił pływowych, gdyż sama siła grawitacji nie jest w stanie utrzymać mniejszego ciała w całości.

Przeanalizujmy teraz następujący eksperyment myślowy określający zachowanie się tych dwóch ciał. Niech m_1 oznacza ciało o dużej masie a m_2 jest ciałem kulistym (masą płynu) utrzymywanego razem przez jego grawitację. Wówczas możemy rozważyć następujące zachowania się ciała o masie m_2.

1. Jeżeli ciało o masie m_2 znajduje się relatywnie daleko od granicy Roche'a to jego kształt jest kulisty.
2. Jeżeli ciało o masie m_2 zbliża się do granicy Roche'a to ulega ono deformacji ze względu na siły pływowe pochodzące od ciała o masie m_1.
3. Jeżeli ciało o masie m_2 znajduje się na granicy Roche'a to ulega ono rozpadowi ze względu na to, że jego siły grawitacyjne są znacznie słabsze niż siły pływowe pochodzące od ciała o masie m_1.
4. Część materii pochodzącej z rozpadu ciała o masie m_2 znajduje się bliżej ciała o masie m_1 i porusza się szybciej niż pozostała jego część.
5. Różnice w prędkości orbitalnej, czyli prędkości z jaką ciało porusza się po orbicie zmieniają materię pochodzącą z ciała o masie m_2 w rozproszony pierścień.

Bezpośrednim przykładem ciała niebieskiego, które wpisuje się w powyższy eksperyment myślowy jest rozpad komety Shoemaker-Levy 9 w 1992 roku w wyniku zbliżenia się do Jowisza.

Rys. 6. „Sznur pereł" powstałych w wyniku rozpadu komety Shoemaker-Levy 9 w 1992 roku (Foto. NASA, ESA).



Rys. 7. Hipotetyczny schemat prowadzący do rozpadu naszego Księżyca. Ponieważ Księżyc co roku oddalana się naszej planety (Ziemi) więc schemat ten należy traktować tylko i wyłącznie jako przypadek hipotetycznej analizy omawianego problemu.

eprasa.pl 0593885dee

Obliczmy jeszcze promień strefy Roche'a (r_{HILLA}) dla planet wchodzących w skład Układu Słonecznego. Promień ten w przybliżeniu możemy określić jako:

$$r_{HILLA} = a \cdot (1-e) \cdot \sqrt[3]{\frac{m_p}{3M_S}}, \qquad (71)$$

gdzie *a* jest półosią wielką orbity, *e* jej mimośrodem, m_p jest masą planety, a M_S jest masą słońca równą $M_S = (1.98847 \pm 0.00007) \cdot 10^{30}$ kg.

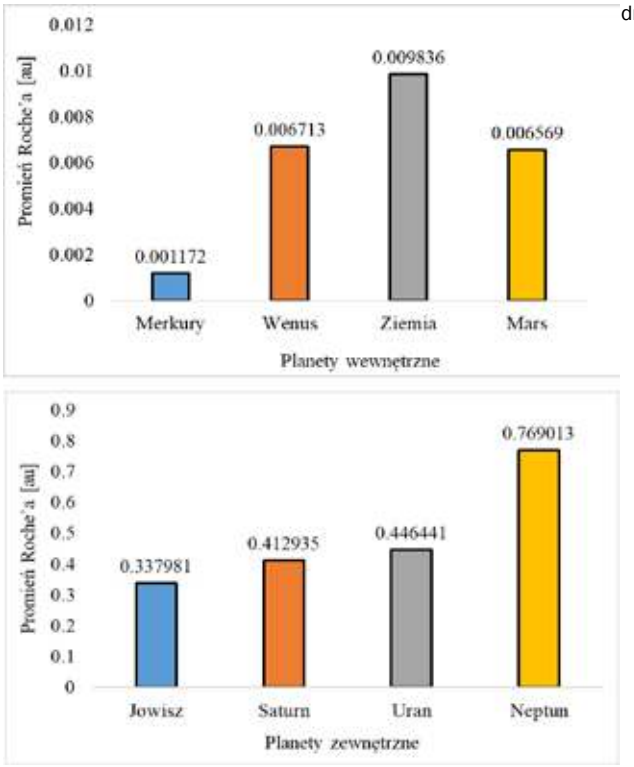
Wykorzystując wzór na peryhelium, który został wyprowadzony w zagadnieniu dwóch punktów materialnych (Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część I) równanie (71) możemy uprościć do następującej postaci:

$$r_{HILLA} = q \cdot \sqrt[3]{\frac{m_p}{3M_S}}, \qquad (72)$$

gdzie *q* określa peryhelium dla danego ciała niebieskiego $q = a \cdot (1-e)$. Na podstawie równania (72) otrzymano wyniki promienia strefy Roche'a (r_{HILLA}) dla planet wchodzących w skład Układu Słonecznego.

Planeta		Masa planety [kg]	Promień Roche'a (r_{HILLA}) [au]
Merkury	0.3075	$3.3011 \cdot 10^{23}$	0.001172
Wenus	0.7184	$4.8675 \cdot 10^{24}$	0.006713
Ziemia	0.9833	$5.9721 \cdot 10^{24}$	0.009836
Mars	1.3814	$6.4171 \cdot 10^{23}$	0.006569
Jowisz	4.9506	$1.8982 \cdot 10^{27}$	0.337981
Saturn	9.0412	$5.6834 \cdot 10^{26}$	0.412935
Uran	18.2861	$8.6810 \cdot 10^{25}$	0.446441
Neptun	29.8100	$1.02413 \cdot 10^{26}$	0.769013

Poniżej został przedstawiony rozkład zależności promienia Roche'a dla planet wewnętrznych i zewnętrznych należących do Układu Słonecznego.



Rys.8. Rozkład zależności promienia Roche'a odpowiednio dla planet wewnętrznych i zewnętrznych.

Literatura:

[1] Rybka, E., 1976, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa.
[2] Borkowski, K. M., 1991, Astronomiczne obliczenia nie tylko dla geografów, UMK Toruń.
[3] Artymowicz, P. 1995, Astrofizyka układów planetarnych, Wyd. Naukowe PWN.
[4] Stodółkiewicz J. S., 1978, Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki, PWN Warszawa.
[5] Kreiner, J. M., 1988, Astronomia z astrofizyką, PWN Warszawa.
[6] Wesołowski, M., 2023, Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część I, „Fizyka w Szkole z Astronomią", nr 1, str. 44-50.
[7] Wesołowski, M., 2023, Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część II, „Fizyka w Szkole z Astronomią", nr 2, str. 46-50.

eprasa.pl 0593885dee

Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część IV

Foto – Dreamstime

W czwartej części rozważań związanych z mechaniką nieba zostały przedstawione przykładowe zadania wraz z ich rozwiązaniami, które opierają się na równaniach przedstawionych w poprzednich naszych artykułach. W tym miejscu zachęcamy Naszych czytelników do podjęcia samodzielnej próby rozwiązania postawionych problemów. W przypadku napotkania trudności zachęcamy do przeanalizowania przykładowego rozwiązania.

Marcin Wesołowski

Zadanie 1. Oblicz na jaką maksymalną odległość od Słońca może oddalić się kometa Halley'a. W obliczeniach przyjmij, że okres orbitalny wynosi *T* = 76 lat, a najmniejsza odległość, na jaką zbliża się ona do Słońca wynosi $R_{min} = 0.9 \cdot 10^8$ km. W rozważaniach uwzględnij, że promień orbity Ziemi wynosi $R_0 = 1.5 \cdot 10^8$ km.

Rozwiązanie:

W tym miejscu wykorzystajmy zależność, którą opisuje III prawo Keplera. Zależność tę możemy zapisać jako:

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \text{const} = \frac{T^2}{a^3}, \tag{1.1}$$

gdzie T_0 jest okresem obiegu Ziemi wokół Słońca (T_0 = 1 rok). Przekształćmy równanie (1.1) w taki sposób, aby można było na jego podstawie wyznaczyć półoś wielką *a* czyli dłuższą oś orbity eliptycznej. Dodajmy, że na dłuższej osi orbity eliptycznej znajdują się jej dwa ogniska. Wówczas z równania (1.1) otrzymujemy:

$$a = R_0 \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_0^2}}. \tag{1.2}$$

Na podstawie rys. 1. łatwo możemy zauważyć, że słuszna jest następująca zależność:

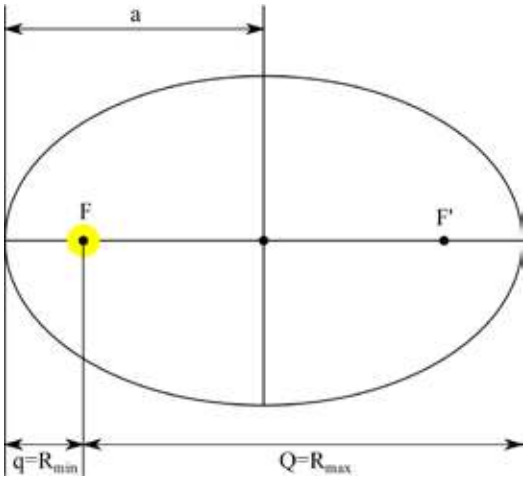
$$R_{min} + R_{max} = 2a. \tag{1.3}$$

Przekształćmy teraz równanie (1.3) w taki sposób, aby można było obliczyć odległość maksymalną:

$$R_{max} = 2a - R_{min}. \tag{1.4}$$

Zauważmy, że w równaniu (1.4) występuje półoś wielka *a*, którą wyznaczyliśmy poprzez równanie (1.2). Podstawmy więc równanie (1.2) do zależności (1.4), wówczas otrzymamy:

$$R_{max} = 2R_0 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2} - R_{min}. \tag{1.5}$$



Rys. 1. Przykładowa orbita eliptyczna dla komety okresowej. Na rysunku poszczególne symbole oznaczają: q – peryhelium, Q – aphelium, F, F' – ogniska, a – półoś wielka. Zauważmy, że dla omawianej sytuacji spełnione jest I prawo Keplera.

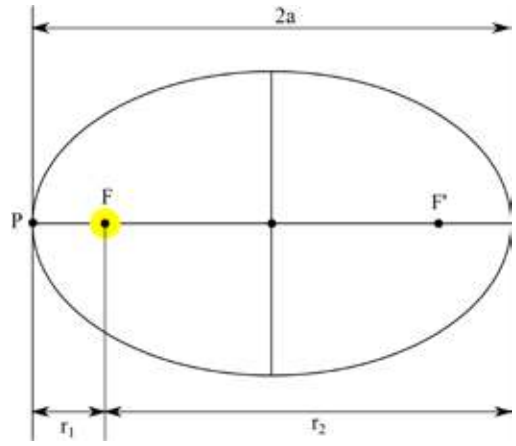
eprasa.pl 0593885dee

Podstawiając podane w treści zadania wartości liczbowe otrzymujemy, że $R_{max} \approx 5.3 \cdot 10^9$ km.

Odpowiedź. Maksymalna odległość na jaką może oddalić się kometa Halley'a od Słońca wynosi w przybliżeniu $5.3 \cdot 10^9$ km.

Zadanie 2. Planeta o masie *m* krąży wokół Słońca po orbicie eliptycznej, przy czym największa jej odległość od Słońca wynosi r_2, a najmniejsza r_1. Znaleźć moment pędu tej planety względem Słońca.

Rozwiązanie:



Rys. 2. Przykładowa orbita eliptyczna dla planety P. Na rysunku poszczególne symbole oznaczają: F, F' – ogniska, r_1 to najmniejsza odległość planety od Słońca, a r_2 to największa odległość planety od Słońca, które położone jest w jednym z ognisk (F) orbity eliptycznej.

Na postawie rozważań przestawionych w drugiej części artykułu pt. „Wybrane zagadnie z mechaniki nieba cz. II" (w szczególności podrozdział „Dowód dla energii"), możemy zapisać, że:

$$E = -\frac{GM_S m}{2a}, \tag{2.1}$$

gdzie: M_S oznacza masę Słońca, *a* jest półosią wielką orbity eliptycznej. Na podstawie rozważań przedstawionych w zadaniu 1 oraz wykorzystując rys. 2 możemy zapisać, że:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.2}$$

Wówczas równanie (2.1) możemy zapisać jako:

$$E = -\frac{GM_S m}{r_1 + r_2}. \tag{2.3}$$

Aby wyznaczyć moment pędu planety względem Słońca ponownie odwołajmy się do artykułów teoretycznych dotyczących wybranych zagadnień z mechaniki nieba cz. I i II, gdzie udowodnione zostało, że moment pędu jest wielkością stałą (K=const). Wówczas na podstawie tych rozważań możemy zapisać, że:

$$K = mv_1 r_1 = \text{const}. \tag{2.4}$$

W równaniu (2.4) parametrem, który musimy jeszcze wyznaczyć jest prędkość planety. Dlatego też wykorzystajmy do tego celu zasadę zachowania energii mechanicznej, którą możemy wyrazić jako:

$$-\frac{GM_S m}{r_1 + r_2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_S m}{r_1}. \tag{2.5}$$

Wykonując proste przekształcenia algebraiczne łatwo można pokazać, że:

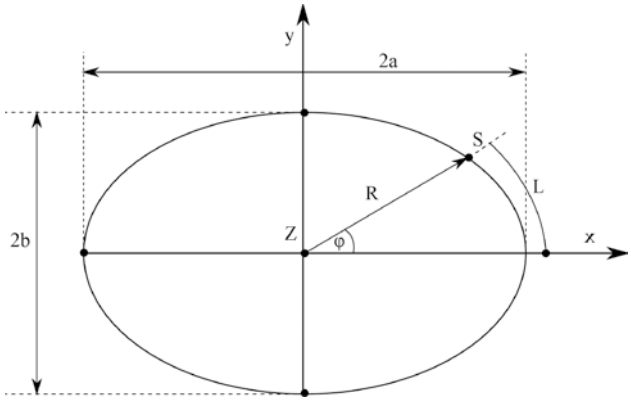
$$v_1 = \sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2GM_S\left(\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}\right)}. \tag{2.6}$$

Podstawmy teraz równanie (2.6) do równania (2.4) wówczas otrzymujemy poszukiwaną zależność na moment pędu K planety względem Słońca:

$$K = m \cdot \sqrt{2GM_S\left(\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}\right)}. \tag{2.7}$$

Odpowiedź: Poszukiwana zależność na moment pędu planety względem Słońca dana jest równaniem (2.7).

Zadanie 3. Sztuczny satelita porusza się po eliptycznej orbicie keplerowskiej. Udowodnić, że średnia wartość odległości, rozumianej jako funkcja długości orbity jest równa dużej półosi elipsy *a*.



Rys. 3. Orbita eliptyczna dla ruchu satelity.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić postawiony w zadaniu problem wykorzystajmy następującą zależność, że: r = r(l). Wówczas średnia wartość długości będzie równa:

$$< r > = \frac{\sum_{i=1}^{n} r(l)\Delta l}{L}. \tag{3.1}$$

Jeżeli sumowanie zostanie rozciągnięte na cały zakres to $n \to \infty$ wówczas równanie (3.1) możemy wyrazić poprzez następującą całkę:

$$< r > = \frac{1}{L}\int_0^L r(l)dl. \tag{3.2}$$

Na podstawie rozważań związanych z równaniem Keplera możemy zapisać, że:

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E). \tag{3.3}$$

W tym miejscu przypomnijmy, że zależność (3.3) została wyprowadzona w trzeciej części naszych rozważań

eprasa.pl 0593885dee

związanych z mechaniką nieba, wówczas równanie (3.2) będzie równe:

$$< r > = \frac{1}{L}\int_0^L a(1-e\cos E)\,dl. \tag{3.4}$$

Wyłączmy teraz stałe przed znak całki, co możemy zapisać jako:

$$< r > = a - \frac{ae}{L}\int_0^L \cos E\,dl. \tag{3.5}$$

Zauważmy teraz, że została nam do obliczenia całka znajdująca się po prawej stronie równania (3.5). Ponownie w tym miejscu wykorzystajmy zależności z trzeciej części rozważań związanych z mechaniką nieba, niech:

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E. \tag{3.6}$$

Obliczmy teraz na podstawie równania (3.6) pochodne dx/dE i dy/dE:

$$dx = -a\sin E\,dE, \quad dy = b\cos E\,dE. \tag{3.7}$$

Następnie zauważmy że: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, więc na podstawie równania (3.7) mamy:

$$dl = \sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE. \tag{3.8}$$

Wówczas nasza całka występująca w równaniu (3.5) będzie równa:

$$\begin{aligned}\int_0^L \cos E\,dl &= \int_0^{2\pi} \cos E\sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE \\ &= \int_0^{\pi} \cos E\sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \cos E\sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE\end{aligned} \tag{3.9}$$

Zauważmy, że anomalię mimośrodową (E) możemy wyrazić jako: $E = \varepsilon + \pi$, wówczas:

$$\cos E = \cos(\varepsilon + \pi) = -\cos\varepsilon \quad dE = d\varepsilon. \tag{3.10}$$

Wobec tego prawa strona równania (3.9) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}&\int_{\pi}^{2\pi} \cos E\sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE \\ &= -\int_0^{\pi} \cos\varepsilon\sqrt{a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon}\,d\varepsilon \\ &= -\int_0^{\pi} \cos E\sqrt{a^2\sin^2 E + b^2\cos^2 E}\,dE.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Odpowiedź: Po podstawieniu granic całkowania widać, że $\int^L \cos E\,dl = 0$, zatem na podstawie równania (3.5) możemy zapisać, że $< r > = a$.

Zadanie 4. Sztuczny satelita porusza się po eliptycznej orbicie keplerowskiej. Udowodnić, że średnia wartość odległości $r(\varphi)$ w funkcji anomalii rzeczywistej jest równa małej półosi elipsy *b*.

Przeprowadzając bardzo podobne rozumowanie jakie zostało przedstawione w zadaniu 3 możemy zapisać, że:

$$< r > = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\phi)\,d\phi, \tag{4.1}$$

niech $r^2\dot{\varphi} = c$, gdzie $r = a(1-e\cos E)$. Wówczas możemy zapisać, że:

$$r\,d\varphi = \frac{c}{r}dt. \tag{4.2}$$

Obliczmy teraz czynnik dt wykorzystując do tego celu równanie Keplera:

$$nt = E - e\sin E, \tag{4.3}$$

co daje nam, że:

$$dt = \frac{(1-e\cos E)dE}{n}. \tag{4.4}$$

Wykorzystując równania od (4.1) do (4.4) możemy zapisać, że:

$$r\,d\phi = \frac{c}{r}dt = \frac{c}{a(1-e\cos E)}\cdot\frac{(1-e\cos E)\,dE}{n}. \tag{4.5}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy, że:

$$r\,d\phi = \frac{c}{r}dt = \frac{c}{a}\frac{dE}{n}. \tag{4.6}$$

Wówczas równanie (4.1) wynosi:

$$\begin{aligned}< r > &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c}{a\,n}dE = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{a\,n}\int_0^{2\pi} dE \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{c}{a\,n}E\Big|_0^{2\pi} = \frac{c}{a\,n}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie n oznacza średni ruch dzienny, który jest równy

$$n = \frac{\sqrt{G\cdot M}}{a^{3/2}},$$

a parametr c określa moment pędu:

$$c = K = \sqrt{G\cdot M\cdot a\cdot\left(1-e^2\right)},$$

wówczas równanie (4.7) jest równe:

$$< r > = a\sqrt{1-e^2} = b. \tag{4.8}$$

Odpowiedź: Poszukiwana tożsamość dana jest równaniem (4.8).

Zadanie 5. Sztuczny satelita porusza się po eliptycznej orbicie keplerowskiej. Udowodnić, że średnia wartość odległości od przyciągającego centrum, rozumianej jako funkcja czasu, jest równa $< r > = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$.

Rozwiązanie:
Ponownie w tym miejscu wykorzystajmy równanie (3.3), które dane jest jako:

$$r = a\cdot(1 - e\cdot\cos E). \tag{5.1}$$

eprasa.pl 0593885dee

Następnie z równania Keplera obliczymy czynnik dt poprzez jego zróżniczkowanie, co możemy zapisać jako:

$$nt = E - e\sin E, \quad dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos E)\,dE. \tag{5.2}$$

Aby wykazać, że poszukiwana średnia wartość odległości zależy od czasu wykorzystamy następującą tożsamość:

$$< r >= \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt. \tag{5.3}$$

Podstawmy teraz do równania (5.3) powyższe dwie zależności (5.1) i (5.2) wówczas mamy:

$$< r >= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} a(1 - e\cos E)\cdot\frac{1}{n}(1 - e\cos E)\,dE. \tag{5.4}$$

Wykorzystując proste wzory oraz podstawowe twierdzenia wynikające z analizy matematycznej a konkretniej z rachunku całkowego równanie (5.4) możemy przepisać do następującej postaci:

$$< r > = \frac{a}{nT}\int_0^{2\pi}(1 - 2e\cos E - e^2\cos^2 E)\,dE$$

$$= \frac{a}{nT}\left[E - 2e\sin E + \frac{e^2}{2}\left(E + \frac{1}{2}\sin 2E\right)\right]_0^{2\pi} \tag{5.5}$$

Po uwzględnieniu granic całkowania oraz pamiętając o tym, że sin(2π)=0 równanie (5.5) upraszcza się do następującej postaci:

$$< r > = \frac{a}{nT}\left(2\pi + \frac{e^2}{2}2\pi\right) = \frac{a}{\frac{2\pi}{T}T}2\pi\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

$$= a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right). \tag{5.6}$$

Uwaga! W równaniu (5.5) wykorzystaliśmy następujący wzór wynikający z rachunku całkowego:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \text{const}.$$

Odpowiedź: Poszukiwana tożsamość dana jest równaniem (5.6).

Zadanie 6. Sztuczny satelita porusza się wokół Ziemi po orbicie kołowej o promieniu $R = 3R_z$, (R_z = 6400 km). Wskutek krótkotrwałego działania urządzenia hamującego, prędkość sztucznego satelity zmniejszyła się w taki sposób, że zaczął on poruszać się po orbicie eliptycznej, stycznej do powierzchni Ziemi. Po jakim czasie sztuczny satelita wyląduje.

Rozwiązanie:
Wykorzystując III prawo Keplera możemy zapisać, że:

$$\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3, \tag{6.1}$$

Przekształćmy teraz równanie (6.1) w taki sposób, aby można było na jego podstawie wyznaczyć parametr T_x:

$$T_x = T\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3}. \tag{6.2}$$

Z treści zadania wynika również, że:

$$2a = R_Z + R = R_Z + 3R_Z = 4R_Z, \tag{6.3}$$

a stąd mamy:

$$a = 2R_Z. \tag{6.4}$$

Wykorzystując równania od (6.3) do (6.4) równanie (6.2) możemy przepisać do następującej postaci:

$$T_x = T\sqrt{\left(\frac{2R_Z}{3R_Z}\right)^3} = T\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3}. \tag{6.5}$$

Ponieważ sztuczny satelita porusza się wokół Ziemi po orbicie kołowej to działają na niego następujące siły: siła grawitacji oraz siła dośrodkowa będąca przyczyną ruchu ciała po okręgu. Porównajmy teraz ze sobą te dwie siły, wówczas otrzymujemy, że:

$$F_d = F_g, \tag{6.6}$$

gdzie:

$$F_d = m\cdot\frac{v^2}{R} = \left\{\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow v = \omega R\right\} = m\cdot\frac{\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Wówczas mamy:

$$m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}. \tag{6.7}$$

Na podstawie równania (6.7) prędkość kąta jest równa:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{(3R_Z)^3}}. \tag{6.8}$$

Z równania (6.8) możemy teraz obliczyć okres T, który jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(3R_Z)^3}{gR_Z^2}} = 6\pi\sqrt{\frac{3R_Z}{g}}. \tag{6.9}$$

Wyznaczone równanie na okres T dane jako zależność (6.9) podstawiamy teraz do równania (6.5) wówczas otrzymujemy:

$$T_x = 6\pi\sqrt{\frac{3R_Z}{g}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = 4\pi\sqrt{\frac{2R_Z}{g}}. \tag{6.10}$$

Wykorzystując zależność (6.10) czas po jakim wyląduje satelita jest równy:

$$\tau = \frac{T}{2} \approx 2^h.$$

Odpowiedź: Czas po jakim satelita wyląduje wynosi około 2 godziny.

eprasa.pl 0593885dee

Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba – część IV

Zadania cz. 2

Marcin Wesołowski

Zadanie 7. Scałkować równanie ruchu prostoliniowego w zagadnieniu 2 ciał. Założyć dodatkowo, że energia całkowita układu jest równa zero. W chwili początkowej odległość wzajemna ciał jest równa r_0.

Rozwiązanie:
Na podstawie treści zadania oraz wcześniejszych rozważań możemy zapisać, że:

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}. \tag{7.1}$$

Zauważmy, że możemy nieco uprościć równanie (7.1) dzieląc go obustronnie przez m, wówczas mamy:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{7.2}$$

Postępując analogicznie jak w pierwszej części rozważań związanych z mechaniką nieba pomóżmy obustronnie równanie (7.2) przez czynnik $\dot{r}$, a następnie scałkujmy to równanie względem czasu dt:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \qquad / \cdot \dot{r}, \tag{7.3}$$

$$\int \ddot{r}\dot{r}dt = -GM\int \frac{\dot{r}}{r^2}dt, \tag{7.4}$$

Wówczas równanie (7.4) możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}\right)^2 = \frac{GM}{r} + C, \tag{7.5}$$

Jednocześnie pamiętając, że: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = v$, wówczas równanie (7.5) możemy wyrazić jako:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = C. \tag{7.6}$$

Zgodnie z założeniem $C > 0$, wówczas na podstawie równania (7.6) mamy:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}}, \tag{7.7}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}}. \tag{7.8}$$

Zatem na mocy równania (7.8) słuszna jest zależność:

$$r^{\frac{1}{2}}dr = \pm\sqrt{2GM}\,dt. \tag{7.9}$$

Całkujemy równanie (7.9) w granicach od $r_0(t_0)$ do $r(t)$ otrzymujemy:

$$\frac{r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{2GM}(t - t_0), \tag{7.10}$$

lub

$$\pm(t - t_0) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right). \tag{7.11}$$

Uwaga: Zauważmy, że do wyznaczenia lewej strony zależności (7.10) wykorzystaliśmy następujący wzór wynikający z rachunku całkowego:

$$\int r^{\frac{1}{2}}\,dr = \int \sqrt{r}\,dr = \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}.$$

Przeprowadź teraz następującą dyskusję:

1. Jeżeli $v_0 = \dot{r}_0 > 0$, $t = t_0 = 0$, $v_0 = +\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$, wtedy $(t - t_0) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right)$.

eprasa.pl 0593885dee

Wtedy gdy *t* rośnie, to *r* również rośnie.

2. Jeżeli $v_0 = \dot{r}_0 < 0,\ \ t = t_0 = 0,\ \ v_0 = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$, wtedy

$$-(t - t_0) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r^{\frac{3}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}}\right),$$

lub

$$(t - t_0) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}\right),$$

Wtedy gdy *t* rośnie, to *r* maleje.

Odpowiedź: Wnioski wynikające z całkowania równania ruchu w zagadnieniu dwóch punktów materialnych zostały omówione w dyskusji.

Zadanie 8. Wyznaczyć prędkość, z jaką podczas całkowitego zaćmienia Słońca, cień Księżyca porusza się po powierzchni Ziemi, nie uwzględniając poprawki wynikającej z orbitalnego ruchu Ziemi. Dla uproszczenia przyjąć, że zaćmienie obserwowane jest w południe na równiku, oraz, że oś Ziemi jest prostopadła do płaszczyzny orbity Księżyca. Kierunki obrotu Ziemi wokół własnej osi i ruchu orbitalnego Księżyca są zgodne. Odległość Księżyca od Ziemi wynosi $r = 3.8 \cdot 10^5$ km. Promień Ziemi $R_Z = 6.4 \cdot 10^3$ km. Przyjąć, że miesiąc księżycowy (gwiazdowy) jest równy 27^d. W rachunkach uwzględnić, że odległość Ziemi od Słońca jest znacznie większa niż odległość Księżyca od Ziemi.

Rozwiązanie:
Przesuwanie się cienia Księżyca związane jest z obrotem Ziemi wokół własnej osi (Δx_1) oraz z ruchem Księżyca po orbicie (Δx_2). Po czasie Δt przesunięcia te są równe:

$$\Delta x_1 = \frac{2\pi R_Z}{T_Z}\Delta t,\ \ T_Z = 1^d, \tag{8.1}$$

$$\Delta x_2 = \frac{2\pi r}{T_K}\Delta t,\ \ \ T_K = 28\,T_Z. \tag{8.2}$$

Kierunek ruchu orbitalnego Księżyca i kierunek ruchu spinowego Ziemi są zgodne, więc wypadkowe przesunięcie cienia jest równe. Wówczas na podstawie równań (8.1) oraz (8.2) możemy zapisać, że:

$$\Delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1 = 2\pi\left(\frac{r}{T_K} - \frac{R_Z}{T_Z}\right)\Delta t. \tag{8.3}$$

Wykorzystując równanie (8.3) możemy teraz wyznaczyć prędkość przesuwania się cienia Księżyca, która wynosi:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2\pi\left(\frac{r}{T_K} - \frac{R_Z}{T_Z}\right) = 0.52 \text{ km/s}. \tag{8.4}$$

Odpowiedź: Poszukiwana wartość prędkości przesuwania się cienia Księżyca wynosi 0.52 km/s.

Zadanie 9. Planeta porusza się po orbicie eliptycznej o dużej półosi a i mimośrodzie e wokół Słońca. Wykorzystując prawa zachowania energii mechanicznej i momentu pędu, obliczyć wartości tych wielkości fizycznych. Masę Słońca M i stałą grawitacji G przyjąć jako znane.

Rozwiązanie:
Z treści zadania wynika, że planeta porusza się po orbicie eliptycznej więc na samym początku, aby określić dwa podstawowe parametry orbitalne (perycentrum i apocentrum). W tym miejscu wyjaśnijmy te dwa ważne pojęcia:

- perycentrum to punkt położony na orbicie eliptycznej, który jest najbliższy środkowi masy rozważanego układu, zwykle ciała centralnego o masie znacznie większej od mniejszego ciała obiegającego. Inaczej mówiąc jest to punkt największego zbliżenia, który jest odpowiednikiem perygeum;
- apocentrum to punkt położony na orbicie eliptycznej, który jest najbardziej odległy od środka masy rozważanego układu. Inaczej mówiąc jest to punkt największego oddalenia, który jest odpowiednikiem apogeum.

Aby wyznaczyć wspomniane dwa punkty wykorzystajmy równanie biegunowe orbity eliptycznej, które możemy zapisać jako:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\varphi}, \tag{9.1}$$

gdzie p jest parametrem orbity eliptycznej ($p = a \cdot (1 - e^2)$), a e jest jej mimośrodem. Wówczas równanie (9.1) jest równe:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\varphi}. \tag{9.2}$$

W trakcie ruchu planety po orbicie eliptycznej kąt φ będzie zmieniał się w zakresie od 0° do 180°. Wówczas na podstawie równania (9.2) mamy:

- dla perycentrum

$$r_1 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos 0} = \frac{a \cdot (1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a \cdot (1 - e) = q, \tag{9.3}$$

- dla apocentrum

$$r_2 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos 180} = \frac{a \cdot (1 - e)(1 + e)}{1 - e}$$
$$= a \cdot (1 + e) = Q. \tag{9.4}$$

Korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej i momentu pędu możemy zapisać:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = E, \tag{9.4}$$

$$2\,mEr^2 + 2\,GMm^2 r - k^2 = 0. \tag{9.5}$$

Zauważmy, że równanie (9.5) jest równaniem kwadratowym, które możemy uprościć do następującej postaci:

eprasa.pl 0593885dee

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0, \tag{9.6}$$

gdzie słuszne są następujące zależności:

$$r_1 + r_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad r_1 r_2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad r_1 + r_2 = 2a. \tag{9.7}$$

Niech $E = -\frac{GMm}{2a}$, następnie w oparciu o równania (9.3) oraz (9.4) mamy:

$$a(1-e)\cdot a(1+e) = -\frac{k^2}{2mE}. \tag{9.8}$$

Wykorzystując powyższe zależności oraz wykonując proste przekształcenia otrzymujemy:

$$a^2(1-e^2) = -\frac{k^2}{2m\left(-\frac{GMm}{2a}\right)} = \frac{k^2 a}{GMm^2}. \tag{9.9}$$

Przekształcając równanie (9.9) łatwo można pokazać, że:

$$k = \sqrt{GMm^2 a\left(1-e^2\right)}. \tag{9.10}$$

Odpowiedź: Poszukiwane równania zostały wykazane.

Zadanie 10. W jaki sposób anomalia rzeczywista zależy od czasu w ruchu parabolicznym w zagadnieniu 2 ciał (równanie Barkera)?

Rozwiązanie:
Wykorzystując rozważania przedstawione w I i II części artykułu związanego z mechaniką nieba możemy zapisać że:

$$r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\varphi}. \tag{10.1}$$

Zauważmy, że równanie (10.1) jest określane jako równanie opisujące krzywą stożkową, gdzie p jest parametrem elipsy ($p = a\left(1-e^2\right)$), gdzie a jest dużą półosią orbity, a e jest jej mimośrodem:

$$r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\varphi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\varphi}. \tag{10.2}$$

Załóżmy dla uproszczenia, że ciało znajduje się w peryhelium orbity wówczas $\varphi = 0$, więc równanie (10.2) jest równe:

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\varphi} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} = a(1-e) = q. \tag{10.3}$$

Ponieważ rozważamy ruch ciała, dla którego torem jest parabola, więc na mocy wcześniejszych rozważań *e* = 1, wówczas z równania (10.2) otrzymamy:

$$p = r\cdot\left(1+e\cdot\cos\varphi\right). \tag{10.4}$$

Wówczas na podstawie powyższych założeń mamy:

$$p = r\cdot\left(1+e\cdot\cos\varphi\right) = r + r\cdot e\cdot\cos\varphi = r + r$$
$$= q + q = 2q. \tag{10.5}$$

Na podstawie równania (10.5) możemy zapisać, że:

$$r = \frac{2q}{1+\cos\varphi}. \tag{10.6}$$

Zauważmy, że z wzorów trygonometrycznych wynika, że: $1+\cos\varphi = 2\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}$, wówczas równanie (10.6) dane jest jako:

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = q\cdot\sec^2\frac{\varphi}{2}. \tag{10.7}$$

Upraszczając równanie (10.7) wykorzystaliśmy funkcję trygonometryczną secans, która jest odwrotnością cosinusa. Aby określić ruch po paraboli należy wykorzystać równanie określające całkę pól w postaci:

$$r^2\dot{\varphi} = c, \tag{10.8}$$

Następnie wykorzystajmy zależność na moment pędu: $c = K = \sqrt{G\cdot M\cdot a\cdot\left(1-e^2\right)}$, wówczas możemy zapisać, że $c^2 = p\cdot\mu$, gdzie p jest parametrem elipsy a $\mu = GM$. Takie podejście sprawia, że równanie (10.8) możemy wyrazić jako:

$$r^2\dot{\varphi} = \sqrt{2q\mu}. \tag{10.9}$$

W oparciu o powyższe zależności możemy zapisać, że:

$$\left(\frac{q}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\mu q}, \tag{10.10}$$

lub

$$\frac{q^2}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}d\varphi = \sqrt{2\mu q}\,dt. \tag{10.11}$$

Następnie dla wygody dalszych obliczeń rozpiszmy lewą stronę równania (10.11) do następującej postaci:

$$\frac{q^2}{\cos^2\frac{\phi}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\phi}{2}+\cos^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}}d\phi = \sqrt{2\mu q}\,dt, \tag{10.12}$$

lub

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\mu q}\,dt = q^2\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}. \tag{10.13}$$

eprasa.pl 0593885dee

W wyniku całkowania równania (10.13) otrzymujemy, że:

$$\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{(t-t_0)}{q^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}\,. \tag{10.14}$$

Uwaga = w powyższych obliczeniach wykorzystaliśmy następujące zależności:

$$\frac{\varphi}{2} = y, \quad d\frac{\varphi}{2} = dy, \quad \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}, \tag{10.14a}$$

$$\int\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \int\frac{dy}{\cos^2 y} = \mathrm{tg}\, y, \tag{10.14b}$$

$$\int\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\frac{\varphi}{2} = \int\frac{\mathrm{tg}^2 y}{\cos^2 y}dy = \int \mathrm{tg}^2 y\, d(\mathrm{tg}\, y)$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^3 y}{3} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}. \tag{10.14c}$$

Odpowiedź: Równanie (10.14) nosi nazwę równania Barkera i wyraża ono związek między anomalią prawdziwą i czasem jaki upłynął od chwili przejścia ciała przez peryhelium swojej orbity.

Zadanie 11. Kometa Halley'a, dla której parametry orbitalne wynoszą odpowiednio *e* = 0.967281, *a* = 17.047 au zbliża się do Słońca. W jakim okresie czasu, w ciągu jednego obiegu, kometa znajdzie się bliżej Słońca niż Ziemia. Obliczyć szukany odstęp czasu przybliżając rzeczywista orbitę komety orbitą paraboliczną o tym samym peryhelium. Przyjąć, że Ziemia porusza się wokół Słońca po orbicie kołowej o promieniu a_0 = 1 au, a okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi T_0 = 1 rok.

Rozwiązanie:
Aby rozwiązać to zagadnie wykorzystajmy w tym miejscu równanie opisujące krzywą stożkową:

$$r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\varphi}. \tag{11.1}$$

Zgodnie z treścią zadania mamy przybliżyć rzeczywistą orbitę komety na orbitę paraboliczną (dla której na podstawie wcześniejszych rozważań przyjmujemy, że *e* = 1), wówczas mamy:

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}, \tag{11.2}$$

gdzie tak jak poprzednio *p* jest parametrem elipsy. Jeżeli założymy, że rozpatrywana kometa znajduje się w peryhelium orbity to w oparciu o równanie (11.2) otrzymujemy:

$$r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+1\cdot\cos 0} = \frac{p}{2}\,. \tag{11.3}$$

Następnie przekształćmy równanie (11.1) w taki sposób aby można było wyznaczyć na jego podstawie parametr p. Dodatkowo wykorzystajmy założenia wynikające z treści zadania, wówczas mamy:

$$p = r\cdot(1+e\cdot\cos\varphi) = r + r\cdot e\cdot\cos\varphi$$
$$= r + r = q + q = 2q. \tag{11.4}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości mamy, że:

$$p = 2q = 1.1155\,\mathrm{au}. \tag{11.5}$$

Wykorzystajmy teraz III prawo Keplera, niech:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3, \tag{11.6}$$

lub

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2 a_0^{\,3}}{T_0^{\,2}}\,. \tag{11.7}$$

Następnie niech słuszna będzie zależność:

$$GM = \mu = 4\pi^2\left[\frac{1\,\mathrm{au}^3}{1\,\mathrm{rok}^2}\right].$$

Aby wyznaczyć poszukiwany czas wykorzystajmy do tego celu równanie Barkera, które możemy wyrazić jako:

$$t - t_0 = \frac{1}{3}(r+p)\sqrt{\frac{2r-p}{\mu}}. \tag{11.8}$$

Następnie w oparciu o zależność (11.8) możemy zapisać:

$$\tau = 2(t-t_0) = \frac{2}{3}(r+p)\sqrt{\frac{2r-p}{\mu}}$$
$$= \frac{2}{3}(a_0+p)\sqrt{\frac{2a_0-p}{4\pi^2}}. \tag{11.9}$$

Upraszając prawą stronę tożsamości (11.9) możemy zapisać, że:

$$\tau = \frac{1}{3\cdot\pi}(a_0+p)\sqrt{2a_0-p}$$
$$= 0.211101\,\mathrm{lat} \approx 0.21\,\mathrm{lat}. \tag{11.10}$$

Odpowiedź: Poszukiwany okres odstępu czasu wynosi w przybliżeniu 0.21 lat.

Zadanie 12. Sztuczny satelita Ziemi wystrzelony został z równika w kierunku Ziemi. Znaleźć taki stosunek promienia orbity satelity do promienia Ziemi, przy którym satelita periodycznie przelatuje nad miejscem, skąd został wystrzelony, dokładnie co dwie doby. Promień Ziemi R_Z = 6400 km.

Rozwiązanie:
Dane: $t = 2T_0 = 48^h$, $T_0 = 24^h$, $R_Z = 6400\,\mathrm{km}$, $r = ?$

Rozważmy dwa następuje przypadki, niech

eprasa.pl 0593885dee

a) $\omega_S > \omega_Z$ wówczas mamy:

$$\omega_S\, t = \omega_Z\, t + 2\pi. \tag{12.1}$$

Podzielmy teraz obustronnie równanie (12.1) przez t wówczas mamy:

$$\omega_S = \frac{\omega_Z\, t + 2\pi}{t} = \omega_Z + \frac{2\pi}{t}. \tag{12.2}$$

Podstawmy teraz warunki wynikające z treści zadania wówczas mamy:

$$\omega_S = \frac{2\pi}{T_0} + \frac{2\pi}{2T_0} = \frac{2\pi}{T_0} + \frac{\pi}{T_0} = \frac{3\pi}{T_0}. \tag{12.3}$$

Następnie porównajmy że sobą dwie siły dośrodkową i grawitacji co możemy zapisać jako:

$$m_S\, \omega_S^2\, r = \frac{GM_Z m_S}{r^2}. \tag{12.4}$$

Uprośćmy teraz równanie (12.4) dzieląc je obustronnie przez m_S:

$$\omega_S^2\, r^3 = GM_Z. \tag{12.5}$$

Wykorzystując równanie (12.3) lewą stronę równania (12.5) możemy wyrazić jako:

$$\frac{9\pi^2 r^3}{T_0^2} = GM_Z, \tag{12.6}$$

jednocześnie pamiętając, że: $g = \frac{GM_Z}{R_Z^2}$, wówczas otrzymamy:

$$\frac{9\pi^2 r^3}{T_0^2} = gR_Z^2. \tag{12.7}$$

Po prostych przekształceniach równania (12.7) możemy zapisać, że:

$$\frac{r}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 g}{9\pi^2 R_Z}} \approx 5. \tag{12.8}$$

W drugim przypadku mamy, że:

b) $\omega_S < \omega_Z$ wówczas możemy zapisać, że:

$$\omega_S\, t = \omega_Z\, t - 2\pi. \tag{12.9}$$

Postępując jak w podpunkcie a) łatwo można pokazać, że:

$$\omega_S = \frac{\pi}{T_0}. \tag{12.10}$$

Dokonajmy teraz również analogicznego porównania siły dośrodkowej i grawitacji jak w podpunkcie a), wówczas mamy:

$$m_S\, \omega_S^2\, r = \frac{GM_Z m_S}{r^2}, \tag{12.11}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w podpunkcie a) otrzymujemy, że:

$$\frac{r}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 g}{\pi^2 R_Z}} \cong 10.57. \tag{12.12}$$

Odpowiedź: Poszukiwane stosunki promieni dane są odpowiednio zależnościami (12.8) oraz (12.12).

eprasa.pl 0593885dee

90 zadań, 20 przykładów i 10 problemów

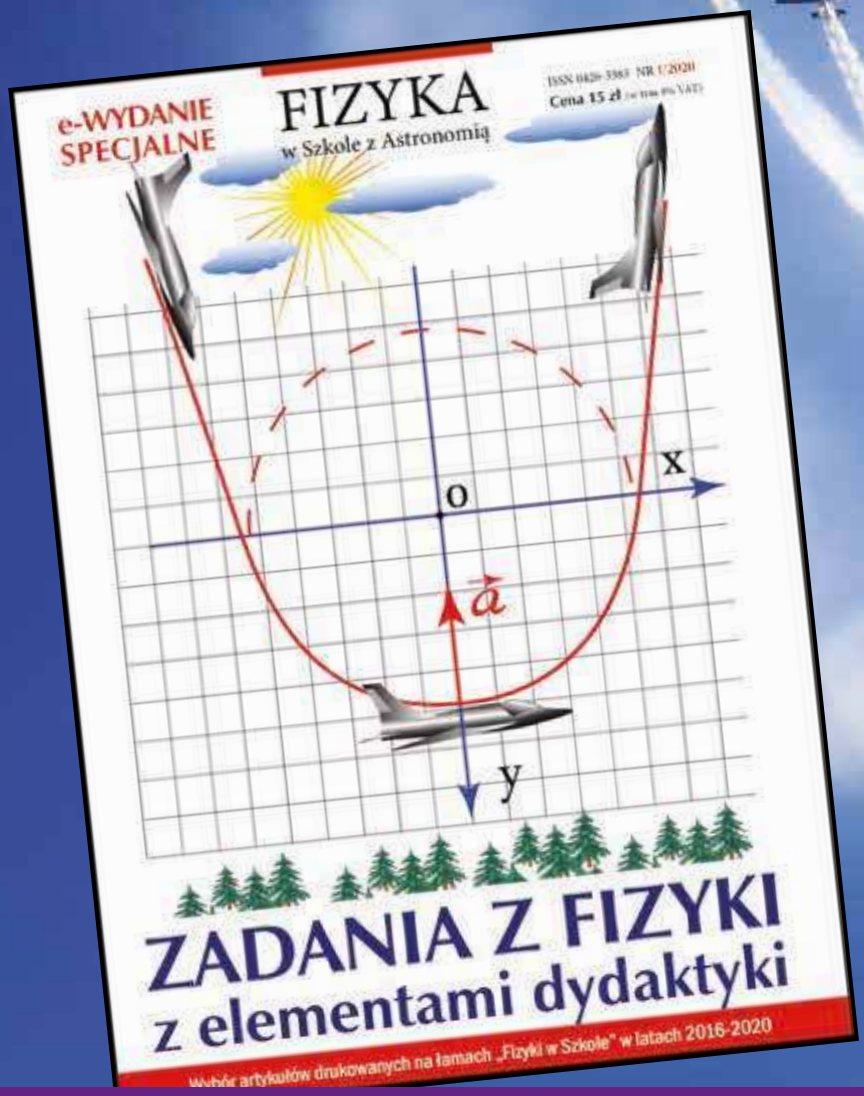
(z omówieniem niektórych rozwiązań)

✔ **Dlaczego fizyka**
jest trudna dla nauczyciela?

✔ **Światowe trendy**
w dydaktyce fizyki

✔ **Które zadania**
są dla ucznia interesujące?

✔ **Czynniki wpływające**
na zapamiętywanie wiedzy



Wydanie specjalne
w wersji
elektronicznej (PDF)

Ceny 15 zł!

Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

Foto – Dreamstime

Orientacja na sferze niebieskiej

Dobowy ruch sfery niebieskiej

Obserwator, który znajduje się w dowolnym miejscu na powierzchni Ziemi odnosi wrażenie, że znajduje się w środku półkulistej czaszy usianej gwiazdami, a czasza ta wydaje się mu nieco spłaszczona. Okazuje się, że niektóre rozważania astronomiczne wygodnie jest omawiać wykorzystując to złudzenie optyczne obserwatora.

Marcin Wesołowski

Przyjmijmy więc, że ciała niebieskie położone są na powierzchni kuli, w środku której znajduje się obserwator. Powierzchnię takiej hipotetycznej kuli nazywamy sferą niebieską, która stanowi złudzenie wynikające z ograniczonej możliwości percepcji odległości przez obserwatora (umiejętności te nie sięgają dalej niż klasyczny zasięg widnokręgu). Skala odległości w jakiej znajdują się obiekty astronomiczne jest tak duża, że obserwacje wizualne nieba nocnego nie dostarczają informacji o ich rzeczywistej odległości. Wszystkie ciała niebieskie, które obserwujemy wydają się być równoodległe, inaczej mówiąc jakby były przymocowane do wnętrza kuli o dużym, ale nie znanym promieniu. Jednocześnie ciała niebieskie położone są na powierzchni sfery niebieskiej, której środkiem jest obserwator.

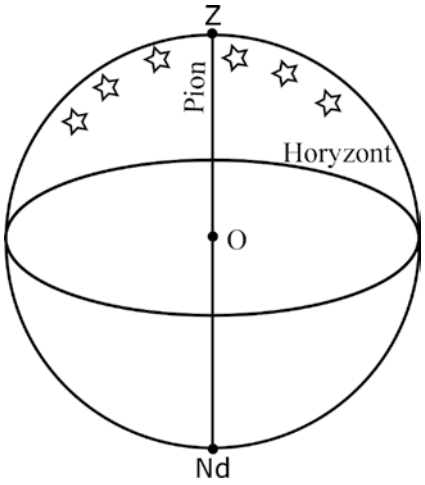
Aby ułatwić orientację na sferze niebieskiej wyróżniamy następujące punkty oraz linie:

Zenit (oznaczenie Z) – jest to punkt znajdujący się na maksymalnej wysokości na sferze niebieskiej nad pozycją obserwatora (nad jego głową).

Nadir (oznaczenie Nd) – jest to przeciwny punkt względem zenitu, który położony jest najniżej pod obserwatorem na sferze niebieskiej. Punkt ten jest niewidoczny, gdyż przesłania go powierzchnia Ziemi.

Linia łącząca zenit z nadirem to pion, inaczej mówiąc zenit i nadir to punkty, w których linia pionowa przecina sferę niebieską. Kąt pomiędzy osią lokalnego pionu a kierunkiem, w którym obserwujemy wybrane ciało niebieskie określany jest kątem zenitalnym.

Płaszczyzna pozioma – jest to płaszczyzna prostopadła do pionu, która przechodzi przez miejsce obserwacji, czyli środek sfery niebieskiej. Ponadto płaszczyzna ta dzieli



Rys. 1. Zależność geometryczna między zenitem, nadirem i horyzontem. W punkcie O znajduje się obserwator.

eprasa.pl 0593885dee

sferę niebieską na dwie półkule: górną (widoczną dla obserwatora) i dolną (niewidoczną dla obserwatora).

Horyzont – jest to okrąg, wzdłuż którego płaszczyzna pozioma przecina sferę niebieską (Rys. 1).

Dokonując obserwacji sfery niebieskiej przez dłuższy czas (np. kilka godzin) dochodzimy do wniosku, że gwiazdy nie zmieniają swojego położenia względem siebie, lecz wykonują ruch kolisty po drogach, które określamy równoleżnikami niebieskimi wokół jednego punktu na sferze niebieskiej (Rys. 2). Punkt ten określamy jako biegun północny niebieski (oznaczenie B1). Zauważmy, że relatywnie blisko bieguna niebieskiego północnego znajduje się Gwiazda Polarna. Często biegun niebieski północny utożsamiany jest z Gwiazdą polarną, jednakże takie przybliżenie nie jest poprawne.

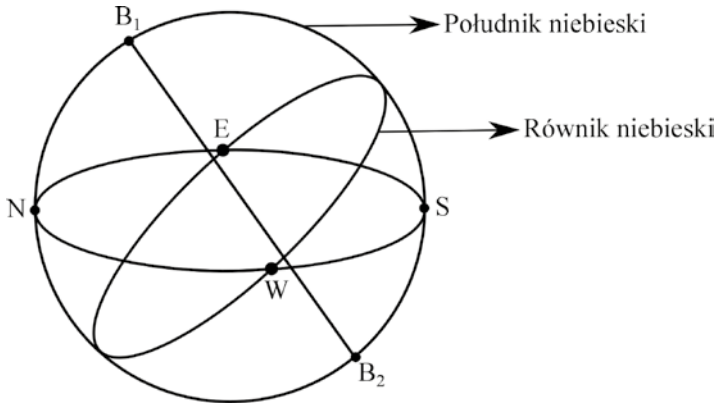
Obecnie północną Gwiazdą polarną jest najjaśniejsza gwiazda Małej Niedźwiedzicy (Małego Wozu) czyli Alfa Ursae Minoris (zwana też Polaris), której jasność wynosi 1.97 magnitudo i pod względem jasności wizualnej zajmuje ona dopiero 46 pozycję. Jej odległość od Ziemi wynosi 430 lat świetlnych (rok świetlny to jednostka odległości stosowana w astronomii i oznacza odległość, jaką pokonuje światło w próżni w ciągu jednego roku juliańskiego). Cechą charakterystyczną Gwiazdy Polarnej jest to, że praktycznie w ciągu nocy nie zmienia swojego położenia, podczas gdy pozostałe gwiazdy krążą wokół bieguna (tzw. gwiazdy okołobiegunowe) lub wschodzą i zachodzą. Dlatego też Gwiazdę Polarną od wieków wykorzystywano do określenia kierunków świata.

Rys. 2. Ślad ruchu kolistego wykonywanego przez gwiazdy położone na sferze niebieskiej. Fotografię wykonano uwzględniając długi czas naświetlania.

Na to która z rzeczywistych gwiazd jest Gwiazdą Polarną wpływa precesja osi Ziemi, czyli zmiana kierunku osi obrotu obracającego się ciała. Orientacja osi zmienia się cyklicznie w ciągu tzw. roku platońskiego, trwającego około 26 tysięcy lat. W 2000 roku Polaris znajdowała się w odległości około 44 minut kątowych od północnego bieguna niebieskiego, powoli zbliża się do niego i najbliżej znajdzie się 24 marca 2100 roku.

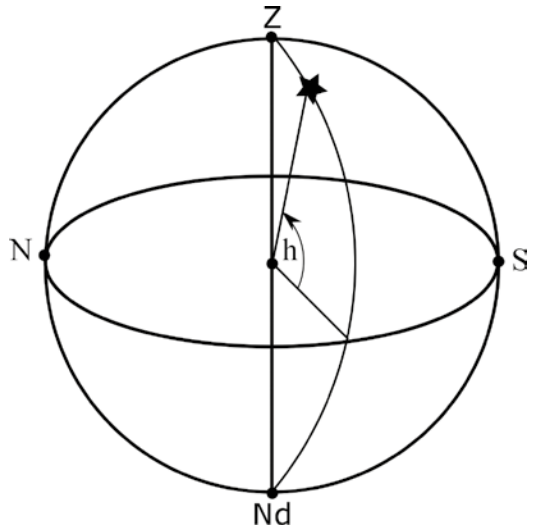
- Oś świata jest prostą przechodzącą przez północny biegun niebieski, miejsce obserwacji oraz drugi punkt, w którym oś świata przebija sferę niebieską nazywamy biegunem niebieskim południowym (oznaczenie B_2). W przypadku Polski biegun ten jest niewidoczny.
- Płaszczyzna równika niebieskiego jest to płaszczyzna prostopadła do osi świata i przechodząca przez miejsce obserwacji.
- Równik niebieski jest to okrąg, wzdłuż którego płaszczyzna równika niebieskiego przecina sferę niebieską. Równoleżniki niebieskie to okręgi, po których poruszają się gwiazdy w swoim ruchu dobowym. Płaszczyzny równoleżników są równoległe do płaszczyzny równika niebieskiego, a więc prostopadłe do osi świata. Koła wielkie to koła, które przechodzą przez środek sfery niebieskiej. Wynika stąd, że płaszczyzny horyzontu astronomicznego i równika niebieskiego są kołami wielkimi.
- Południk niebieski (południk lokalny) jest to koło wielkie przechodzące przez zenit, nadir i bieguny niebieskie. Południk niebieski to miejsce, w którym zachodzą kulminacje ciał niebieskich. Poprzez kulminację należy rozumieć górowania (osiągnięcie maksymalnej wysokości w czasie obrotu sfery niebieskiej) i dołowanie (osiągnięcie minimalnej wysokości w czasie obrotu sfery niebieskiej) danego ciała niebieskiego np. gwiazdy. Dodajmy, że te dwa rodzaje kulminacji zachodzą na tym samym okręgu wielkim (południk lokalny, południk niebieski).

  Punkty przecięcia południka z horyzontem określamy jako punkt północny N i punkt południowy S, przy czym punkt N położony jest bliżej północnego bieguna niebieskiego. Linię N-S czyli prostą, wydłuż której południk nie-



Rys. 3. Wzajemne położenie biegunów niebieskich (B_1 i B_2), równika i południka niebieskiego oraz punktów kardynalnych horyzontu.

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 4. Wysokość horyzontalna gwiazdy.

bieski przecina płaszczyznę horyzontu nazywamy południkiem geograficznym miejscowym. Punkty przecięcia równika niebieskiego z horyzontem to punkty wschodu E i zachodu W. Przy czym punkt wschodu E położony jest po tej samej stronie horyzontu, po której wschodzi Słońce. Punkty N, S, E i W są określane jako kardynalne punkty horyzontu (Rys. 3).

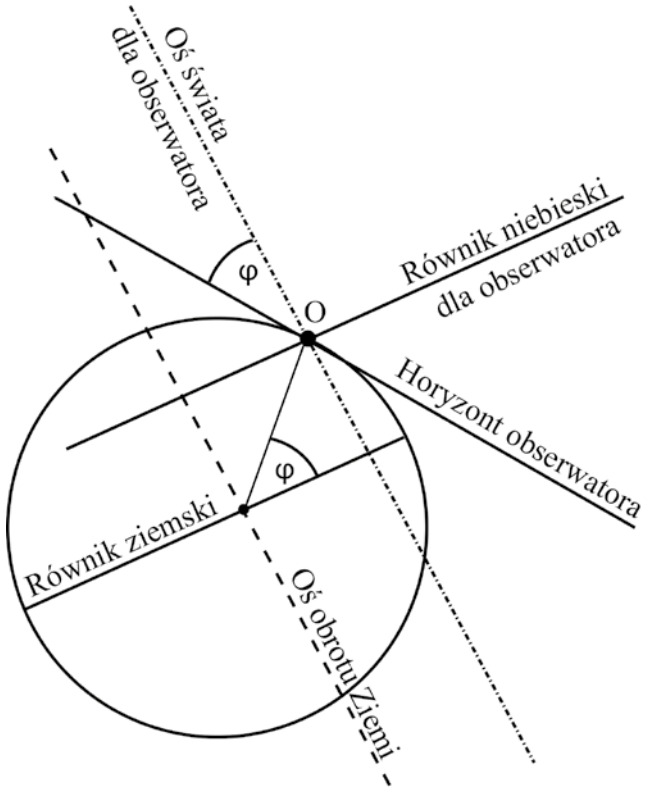
- Wysokość horyzontalna gwiazdy to kąt, jaki tworzy kierunek ku gwieździe z płaszczyzną horyzontu (Rys. 4).

Dobowy ruch sfery niebieskiej

Widomy ruch całej sfery niebieskiej w astronomii sferycznej określany jest mianem ruchu dziennego (dobowego) nieba. Ponieważ obserwator znajduje się na powierzchni Ziemi, która wiruje z zachodu na wschód, więc odnosi wrażenie, że to on jest nieruchomy a otoczenie, czyli sfera niebieska wiruje w kierunku przeciwnym. Jest to złudzenie podobne do tego, jakiemu ulegamy jadąc np. pociągiem lub samochodem wydaje się nam, że otoczenie (drzewa, domy, itp.) przemieszczają się do tyłu.

Konsekwencją tego, iż odzwierciedleniem ruchu wirowego jest ruch dobowy sfery niebieskiej jest fakt, że oś świata jest równoległa do osi rotacji Ziemi, a równik niebieski jest równoległy do równika ziemskiego. Kąt jaki tworzy oś świata z płaszczyzną horyzontu obserwatora jest równy szerokości geograficznej miejsca obserwacji (kąty o ramionach wzajemnie prostopadłych, jak na Rys. 5). Tak więc pełny obrót sfery niebieskiej następuje w czasie równym obrotowi Ziemi wokół własnej osi, to znaczy w ciągu jednej doby gwiazdowej, która jest około 4 minuty krótsza od doby używanej w życiu codziennym (doby słonecznej).

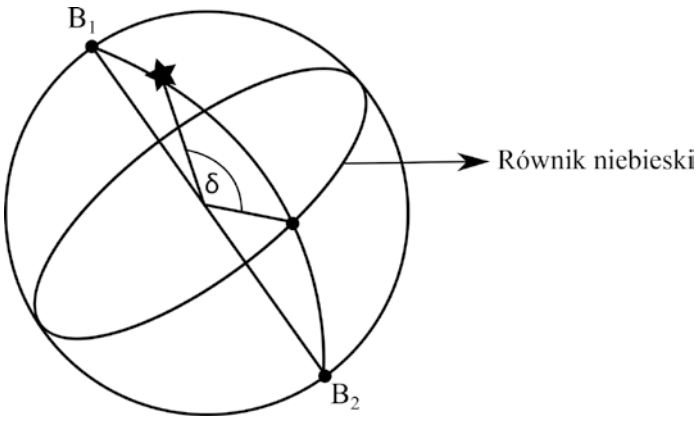
Gwiazda poruszając się w ruchu dobowym po równoleżniku przechodzi dwukrotnie w ciągu doby gwiazdowej przez południk; raz gdy znajduje się najwyżej nad horyzontem (górowanie) i drugi raz gdy znajduje się najniżej względem



Rys. 5. Zależność ustawienia sfery niebieskiej od szerokości geograficznej ϕ miejsca obserwacji.

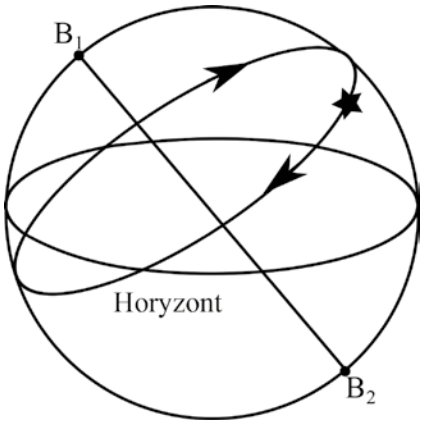
horyzontu (dołowanie). Gwiazdy, które znajdują się blisko bieguna północnego niebieskiego są zawsze nad horyzontem, a gwiazdy znajdujące się blisko bieguna niebieskiego południowego znajdują się zawsze pod horyzontem, czyli są one niewidoczne dla obserwatora. Natomiast równoleżniki, po których poruszają się gwiazdy wschodzące i zachodzące zgrupowane są w pobliżu równika niebieskiego i przecinają horyzont w dwóch punktach. Gdy gwiazda wyłania się spod horyzontu mówimy wówczas o wschodzie gwiazdy, gdy chowa się za linią horyzontu mówimy wówczas o zachodzie gwiazdy.

Dodajmy, że wszystkie gwiazdy wschodzą po wschodniej



Rys.6. Deklinacja gwiazdy.

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 7. Ruch dobowy sfery niebieskiej.

Rys. 8. Zachód Słońca na Marsie – fotografia wykonana przez łazik Spirit (Foto. NASA).

stronie sfery niebieskiej a zachodzą po zachodniej stronie sfery niebieskiej. Punkty wschodu lub zachodu obserwowanej gwiazdy nie należy mylić z punktami kardynalnymi E i W.

Obserwując ruch różnych gwiazd można dojść do wniosku, że wysokość gwiazdy w chwili kulminacji górnej oraz długość łuku równoleżnika widoczna nad horyzontem zależą od odległości kątowej jej równoleżnika od płaszczyzny równika. Tą odległość kątową w astronomii określamy jako deklinację gwiazdy. Inaczej mówiąc jest to kąt, jaki tworzy kierunek do gwiazdy z płaszczyzną równika niebieskiego (Rys. 6). Natomiast gwiazdy, które są położone nad równikiem w kierunku bieguna niebieskiego północnego mają deklinację dodatnią, na równiku mają deklinację równą zero, a pod równikiem mają deklinację ujemną. Ponadto biegun niebieski północny ma deklinację równą + 90°, a biegun niebieski południowy ma deklinację równą – 90°. Każda gwiazda odbywa ruch dobowy po właściwym równoleżniku w każdym dniu w ciągu roku (z wyjątkiem Słońca, Rys. 7).

Słońce jest gwiazdą najbliższą Ziemi i do jego ruchu dobowego po sferze niebieskiej stosujemy przedstawione w tym artykule prawidłowości. Słońce wyłania się spod horyzontu po stronie wschodniej sfery niebieskiej a zachodzi po stronie zachodniej. Wschód Słońca to moment, w którym górny punkt tarczy słonecznej przekracza linię horyzontu, natomiast zachód Słońca to moment, w którym Słońce chowa się poniżej horyzontu.

Wydawać by się mogło, że Słońce „wschodzi" znad horyzontu, to tak naprawdę ruch Ziemi powoduje, że Słońce się pojawia. Iluzja poruszającego się Słońca wynika z faktu, że obserwatorzy ziemscy znajdują się w ruchomym układzie odniesienia. Ten pozorny ruch jest tak przekonujący, że wiele kultur zbudowało mitologie i religie wokół modelu geocentrycznego, który panował, dopóki Mikołaj Kopernik nie sformułował swojego modelu heliocentrycznego w XVI wieku.

W ciągu dnia wysokość Słońca nad horyzontem wzrasta do momentu górowania, a następnie maleje do chwili zachodu. Moment, w którym Słońce znajduje się w czasie górowania na południku niebieskim określamy jako południe słoneczne, a moment dołowania to północ słoneczna. W czasie górowania Słońce położone jest najwyżej nad linią horyzontu więc przedmioty na powierzchni Ziemi rzucają najkrótszy cień.

Śledząc długość cienia rzucanego przez pionowo ustawiony pręt (gnomon) możemy przekonać się, że cień jest najkrótszy w chwili, gdy Słońce znajduje się najwyżej nad horyzontem. Cień gnomonu wskazuje wtedy kierunek N-S, a więc gnomon może służyć do wyznaczenia południka miejscowego (geograficznego). Część równoleżnika, po którym porusza się Słońce nad horyzontem nazywamy łukiem dziennym. Natomiast dzień to okres od wschodu do zachodu Słońca, a noc to okres od zachodu do wschodu Słońca. Okres czasu między dwoma kolejnymi górowaniami Słońca nazywamy dobą słoneczną.

Literatura:

[1] Rybka, E., 1976, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa.
[2] Stodółkiewicz J. S., 1978, Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki, PWN Warszawa.
[3] Gronkowski P., Wesołowski M., 2014, Podstawy astronomii sferycznej, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 2, str. 10 – 16.
[4] Gronkowski P., Wesołowski M., 2014, Astronomia sferyczna w przykładach, cz. I, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 4, str. 11 – 15.
[5] Gronkowski P., Wesołowski M., 2014, Astronomia sferyczna w przykładach, cz. II, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 5, str. 16 – 18.

eprasa.pl 0593885dee

Astronomiczna rachuba czasu

cz. 1

Foto – Dreamstime

W pierwszej części tego artykułu przedstawione zostały najważniejsze informacje i pojęcia związane z astronomiczną rachubą czasu.

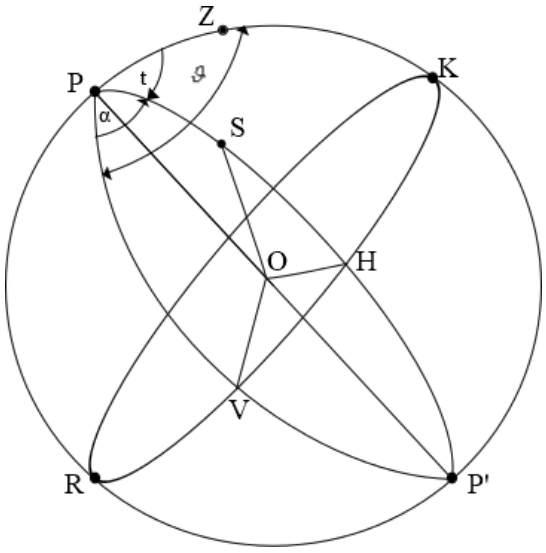
Marcin Wesołowski

Astronomia jest jedną z najstarszych nauk zajmujących się wyjaśnianiem i analizą ruchów ciał niebieskich. Jednym z fundamentalnych problemów astronomii jest astronomiczna rachuba czasu. Mówiąc o czasie w sensie czysto astronomicznym mamy na myśli przeważnie krótkie odstępy czasu związane z dobą, a więc z ruchem obrotowym Ziemi. W astronomii praktycznej miarą czasu jest zawsze kąt godzinny ruchu określonego punktu na sferze niebieskiej. Czas określamy więc jako pewien kąt i tym tłumaczy się stosowanie jednostek czasowych do określenia kątów godzinnych. Przy wyznaczaniu odstępów czasu często w praktyce są stosowane jeszcze następujące zjawiska: drgania kryształów, okresowe zmiany wewnątrz atomów, ruch wahadła, itp. Podane powyżej przykłady zjawisk fizycznych służą do budowy coraz to dokładniejszych instrumentów odmierzających czas.

Dokonując analizy astronomicznej rachuby czasu skupimy się na następujących zagadnieniach: czas gwiazdowy, czas słoneczny i czas strefowy.

Czas gwiazdowy

Wraz z ruchem dziennym sfery niebieskiej ściśle związane jest pojęcie czasu gwiazdowego. Jeżeli gwiazdy byłyby nieruchomymi punktami położonymi na sferze niebieskiej, to za obiekt służący do wyznaczania czasu gwiazdowego moglibyśmy wybrać tak naprawdę dowolną gwiazdę. Wówczas moglibyśmy mierzyć czas jej katem godzinnym. Jednakże gwiazdy nie należą do obiektów astronomicznych, które są ściśle nieruchome, tak więc nie możemy ich traktować jako nieruchome punkty sfery niebieskiej. Dlatego, że w ich położeniach występują niewielkie wzajemne przesunięcia. Aby w miarę dokładnie dokonać pomiarów czasu najlepiej jest go powiązać z układami współrzędnymi. Najlepszym takim układem w tym przypadku będzie drugi układ współrzędnych równikowych.



Rys. 1. Związek czasu gwiazdowego ϑ z kątem godzinnym t i rektascensją α.

eprasa.pl 0593885dee

W rachubie czasu za podstawowy punkt sfery niebieskiej należy przyjąć punkt równonocy wiosennej i kąt godzinny tego punktu nazywamy czasem gwiazdowym. Różnica czasu pomiędzy kolejnymi kulminacjami górnymi punktu równonocy wiosennej w astronomii nosi nazwę doby gwiazdowej.

Z Rys. 1. wynika, że: koło PZKP'RP – oznacza południk, KHVRK – równik, P – biegun północny, S – położenie ciała na sferze niebieskiej, V – punkt równonocy wiosennej.

Korzystając z definicji kąta godzinnego t i rektascensji α wynika, że kąt godzinny ϑ punktu równonocy wiosennej V (czyli czas gwiazdowy, ϑ) jest sumą tych dwóch kątów. Dlatego też jego wartość jest równa:

$$\vartheta = t + \alpha. \tag{1}$$

W szczególnym przypadku w momencie kulminacji górnej, wtedy, gdy t = 0, dla tego momentu mamy:

$$\vartheta = 0 + \alpha = \alpha. \tag{2}$$

Na podstawie równania (1 i 2) możemy stwierdzić, że czas gwiazdowy w takim przypadku jest równy rektascensji ciał niebieskich w ich momencie górowania. Wynika stąd bardzo praktyczna rzecz, że czas gwiazdowy może być wyznaczony obserwacyjnie, jeżeli zaobserwujemy moment kulminacji ciała niebieskiego o znanej rektascensji α.

Czas słoneczny

Decydujące znaczenie podczas obserwacji astronomicznych ma czas gwiazdowy. Jednakże czas ten nie znajduje większego zastosowania związanego z egzystowaniem ludzi. Życie człowieka, związane jest ściśle ruchem dziennym naszej jedynej gwiazdy znajdującej się w Układzie Słonecznym – Słońca. Wśród wielu zjawisk zachodzących na sferze niebieskiej pierwotny człowiek nauczył się odróżniać światło od ciemności. Całą dobę podzielił na dwie części: dzień – to jest od wschodu Słońca, aż do jego zachodu i noc od zachodu do wschodu Słońca.

Wraz z dalszym rozwojem cywilizacji człowiek uczył się dzielić dzień i noc na mniejsze jednostki czasowe. Już około 3000 roku p.n.e. w starożytnym Egipcie wprowadzono pojęcie godziny. System ten zakładał, że dzień zostanie podzielony na 12 godzin dziennych i noc na 12 godzin nocnych. Taki właśnie system stosowali także Grecy, skąd przejeli go Rzymianie i Arabowie, a od nich narody europejskie czasów średniowiecza. Taki system podziału doby pozostał zasadniczo niezmieniony do czasów dzisiejszych.

Wraz ze znaczącym rozwojem astronomii przyjęto za podstawową miarę czasu kąt godzinny środka tarczy słonecznej. Różnica czasu między kolejnymi górnymi lub dolnymi kulminacjami środka tarczy słonecznej nosi nazwę prawdziwej doby słonecznej. Czas kulminacji górnej to prawdziwe południe, a chwila kulminacji dolnej to prawdziwa północ. W obecnym czasie za początek prawdziwej doby słonecznej przyjmuje się północ. Dlatego też prawdziwy czas słoneczny T_O określamy jako kąt godzinny środka tarczy słonecznej t_O powiększony o 12^h. Wówczas słuszna będzie następująca zależność:

Foto. 1. Zegar słoneczny (źródło: wikipedia).

$$T_O = t_O + 12^h. \tag{3}$$

Prawdziwy czas słoneczny wskazują zegary słoneczne. Główną częścią tego mechanizmu jest pręt skierowany ku biegunowi północnemu. Tworzy on z płaszczyzną horyzontu kąt φ, który jest równy szerokości geograficznej. Wskazówką zegara jest cień rzucany przez pręt. Płaszczyzny poprowadzone przez Słońce i pręt są płaszczyznami kół godzinnych Słońca. Cień rzucany przez pręt zegara słonecznego znajduje się w płaszczyźnie koła godzinnego Słońca.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na istotny fakt, mówiący o tym, że prawdziwy czas słoneczny nie jest czasem jednostajnym. Jednym z głównych powodów takiej sytuacji jest fakt, że kąt godzinny środka tarczy słonecznej nie narasta jednostajnie. Wynika stąd, że poszczególne doby słoneczne nie są sobie równe, gdyż Słońce porusza się z różną prędkością po ekliptyce. Jednakże, gdyby prędkość Słońca była stała, to kąty godzinne Słońca nie narastałyby jednostajnie, gdyż rzuty na równik równych łuków ekliptyki w różnych miejscach nie są jednakowe. Aby dokonać w miarę dokładnie rejestracji zachodzących zjawisk fizycznych jak i astronomicznych wymagany jest tzw. czas wzrastający jednostajnie. Możemy go otrzymać poprzez wprowadzenie pojęcia średniego Słońca, który będziemy traktować, jako punkt matematyczny. Dzięki takiemu podejściu ruch Słońca odbywa się ze stałą prędkością kątową, która jest równa średniej prędkości kątowej rzeczywistego ruchu Słońca po ekliptyce. Z potraktowania średniego Słońca jako punktu matematycznego wynika, że rektascensja α_m słońca średniego jest równa jego średniej długości ekliptycznej λ_m.

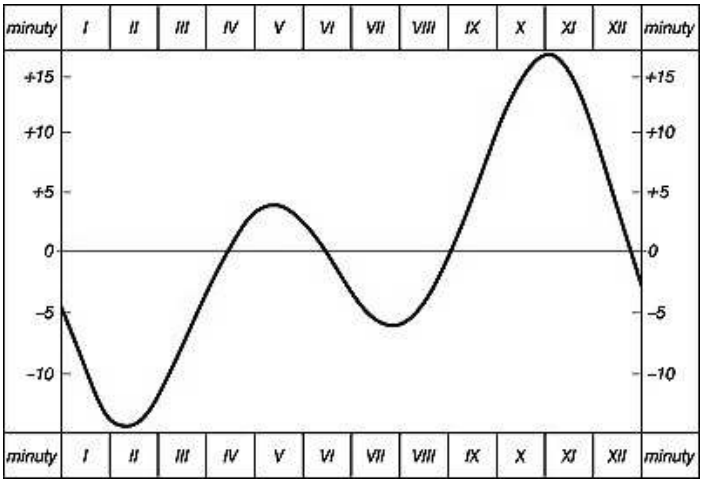
$$T_S = t_S + 12^h. \tag{4}$$

Różnicę pomiędzy rektascensją średniego słońca a rektascensją środka tarczy Słońca rzeczywistego w astronomii nazywamy równaniem czasu.

Równanie to możemy zapisać jako:

$$E = -7.7 \cdot \sin\left(79^\circ + \lambda\right) + 9.5 \cdot \sin\left(2\lambda\right), \tag{5}$$

eprasa.pl 0593885dee



Rys.2. Wykres równania czasu.

gdzie λ oznacza długość ekliptyczną Słońca prawdziwego, a współczynniki -7.7 oraz 9.5 wyrażone są w minutach.

Inaczej mówiąc równanie czasu określa różnicę pomiędzy czasem prawdziwym słonecznym i średnim przy założeniu, że oba te czasy obliczamy jednocześnie.

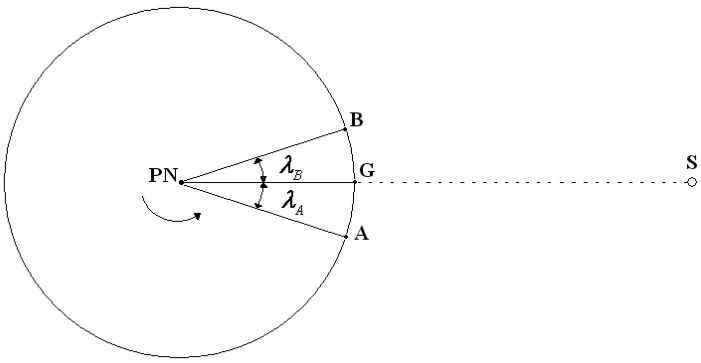
$$\Delta\alpha = T_O - T_S. \tag{6}$$

Przebieg równania czasu można przedstawić w następujący sposób, jak na rysunku 2.

Czas strefowy

Ziemia w swoim ruchu wirowym wykonuje w stosunku do Słońca obrót o 360° w ciągu 24 godzin. Wynika z tego, że w ciągu godziny Ziemia obraca się o kąt 15°, a więc w ciągu minuty o ¼ °. Konsekwencją tego jest fakt, że Słońce góruje w miejscowościach o różnych długościach geograficznych w różnym czasie. Oznacza to, że na różnych długościach geograficznych mamy różne czasy miejscowe.

Załóżmy, że patrzymy od strony północnego bieguna Ziemi na Ziemię wirującą wokół własnej osi na tle sfery niebieskiej. Na rysunku 3 zaznaczono następujące punkty: punkt PN oznacza biegun północny, punkt Greenwich G (λ=0°), punkt A to miejscowość położona na zachód od Greenwich, punkt B miejscowość położoną na wschód od Greenwich oraz S to Słońce. Rysunek 3 przedstawia moment, gdy Słońce góruje na południku Greenwich tzn. jest tam słoneczne południe: $t_G = 12^{00}$. Niech długość geograficzna miejscowości A wynosi $\lambda_A = 15^o$ W, a długość geograficzna miejscowości B wynosi $\lambda_B = 15^o$ E. Ponieważ Ziemia w ciągu godziny obróci się z zachodu na wschód o 15°, więc Słońce górowało już na południku w miejscowości B godzinę wcześniej, a będzie górować na południku w miejscowości A za godzinę. Z przeprowadzonej analizy wynika bezpośrednio, że w miejscowości B jest godzina 13^{00}, a w miejscowości A jest godzina 11^{00}.



Rys.3. Górowanie słońca na południku Greenwich.

Na podstawie tak przeprowadzonej analizy możemy wyciągnąć następujące wnioski:

$t_A = 11^{00}$ $t_G = 12^{00}$, $t_B = 13^{00}$,
$\lambda_A = 15^o$ W, $\lambda_G = 0^o$, $\lambda_B = 15^o$ E.

Należy pamiętać, że czas miejscowy równy jest czasowi w Greenwich pomniejszonemu o długość geograficzną danego miejsca obserwacji wyrażoną w mierze czasowej (15° długości geograficznej odpowiada 1 godzina). Wówczas obowiązuje tutaj następująca zasada: długości geograficzne zachodnie są dodatnie, a długości geograficzne wschodnie są ujemnie. Dla dwóch różnych miejscowości A i B możemy zapisać:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_G + \lambda_1, \\ t_2 &= t_G + \lambda_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy:

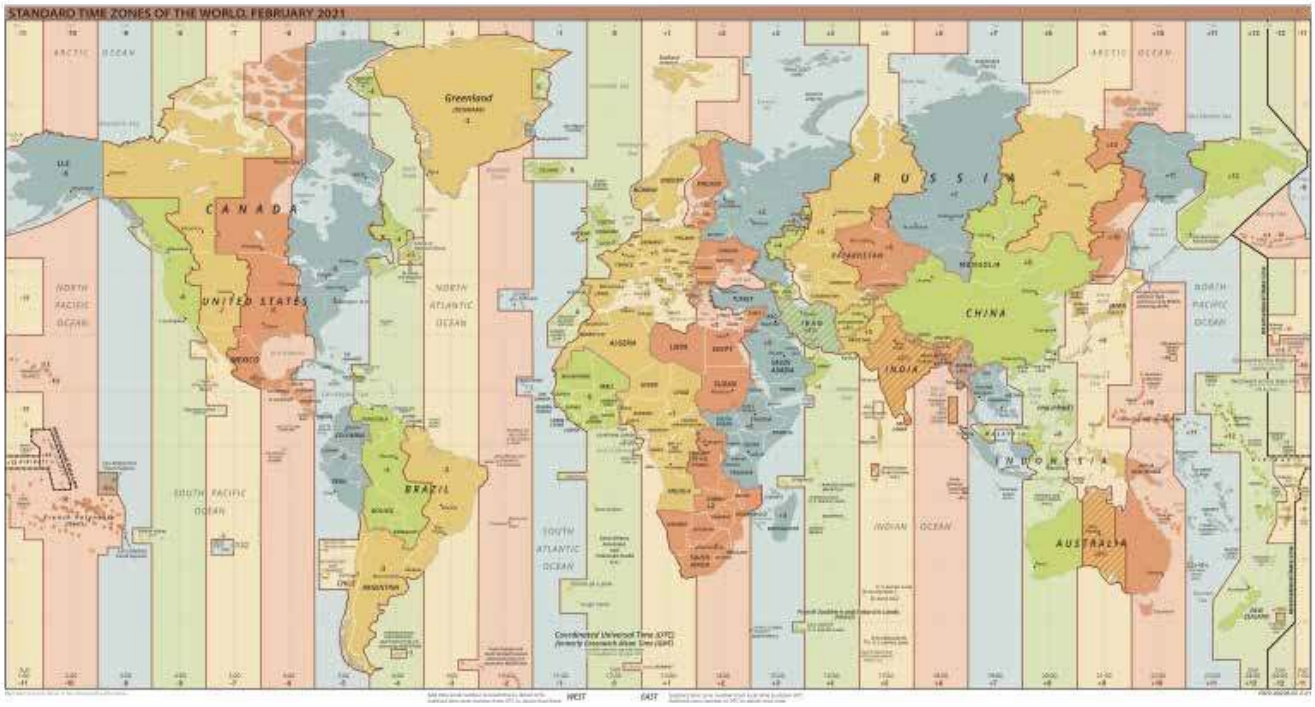
$$t_1 - t_2 = \lambda_1 - \lambda_2. \tag{8}$$

Otrzymana różnica czasów miejscowych w dwóch miejscowościach A i B jest równa różnicy długości geograficznych pomiędzy tymi miejscowościami.

Gdyby na różnych południkach regulowano zegarki według czasów miejscowych, to wskazywałyby one różne czasy, nawet w miejscowościach położonych bardzo blisko siebie. Aby uniknąć tej niedogodności wprowadzono na Ziemi 24 strefy czasowe (rys.4), z których każda obejmuje obszar 15° długości geograficznej. W strefach sąsiednich czas różni się o jedną godzinę. Środek pierwszej strefy wyznacza południk λ_G=0° (Greenwich), który obejmuje obszar od 7,5° W aż do 7,5° E. W całej tej strefie czas liczony jest według czasu słonecznego miejscowego południka λ_G=0°. Czas w tej strefie nazywamy czasem uniwersalnym (UT – Universal Time).

Na wschód od strefy czasu uniwersalnego w każdej strefie czas zwiększa się o jedną godzinę, a na zachód w każdej strefie czas pomniejsza się o jedną godzinę. Weźmy pod uwagę np. północ czasu uniwersalnego. W strefie południka -1^h (na wschód) jest godzina 1^{00} po północy dnia 10.07, w strefie -2^h jest godzina 2^{00} po północy dnia 10.07 itd. Przesuwając się tak dalej na wschód stwierdzamy, że w strefie -12^h jest godzinna 12^{00} w południe dnia 10.07. Natomiast w strefie południka $+1^h$ (na zachód) jest o godzinę wcześniej niż na południku 0^h czyli jest 23^{00} przed północą dnia 9.07. Natomiast w strefie $+2^h$ jest godzina 22^{00} przed

eprasa.pl 0593885dee



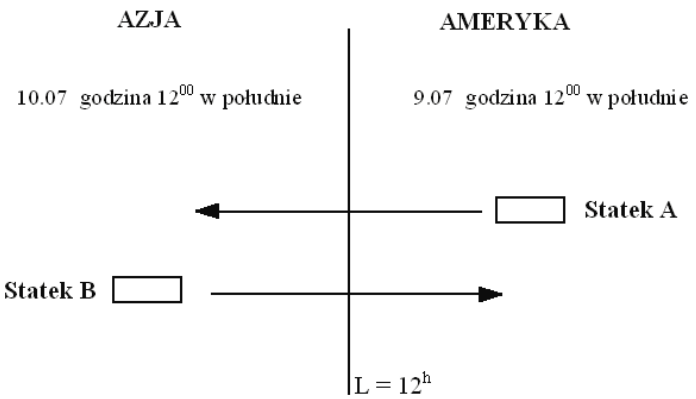
Rys. 4. Podział Ziemi na 24 strefy czasowe.

północą dnia 9.07 itd. Wreszcie w strefie $+12^h$ jest godzina 12^{00} w południe dnia 9.07.

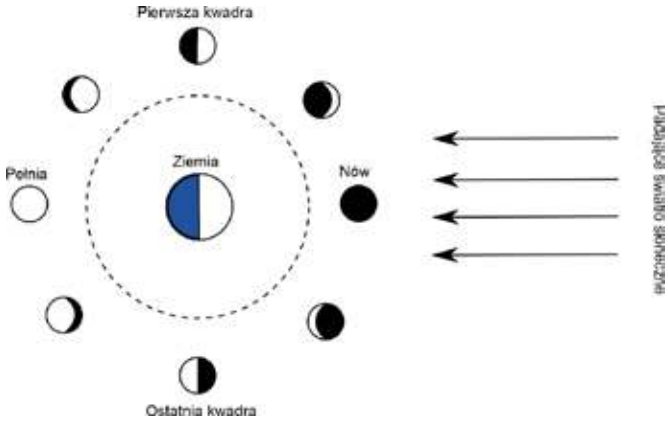
Rozważania związane ze zmianą czasu a w konsekwencji i daty ściśle są zawiązane np. z podróżowaniem z Azji do Ameryki. W celu podjęcia próby wyjaśnienia tego problemu posłużymy się następującym przykładem. Dwaj podróżni, z których jeden dotarł do południka $L = 12^h$ od zachodu a drugi od wschodu, datowali dzień odmiennie i różniliby się w rachubie daty o jeden dzień. Na południku tym zgodnie z zasadą czasu strefowego powinna, zatem nastąpić zmiana daty. Ustalono, że granica daty nie biegnie ściśle wzdłuż południka $L = 12^h$ (180°) lecz przebiega przez Ocean Spokojny nie przecinając wysp i lądów. Zmiany daty dokonuje się zazwyczaj o najbliższej północy – po przekroczeniu linii zmiany daty (rys. 5).

Z przedstawionego przykładu wynika, że dwa statki przepływają przez linię zmiany daty. Statek A płynący z Ameryki do Azji ma datę 9.07 – z tą datą wpłynął w obszar, gdzie trwa data 10.07. Za 12 godzin kończą się jednocześnie dwie daty: 9.07 i 10.07 na pokładzie statku, w obszarze, w który wpłynął statek. O północy zaczyna się w tym obszarze kolejny dzień 11.07. Na statku załoga dostosowuje się do daty obowiązującej. W dzienniku pokładowym stwierdzono, więc, że po 9.07 nastąpił 11.07. Jeden dzień to jest 10.07 został „zgubiony".

Natomiast statek B płynący z Azji do Ameryki przekroczył linię zmiany daty mając na pokładzie 10.07 i wpłynął do strefy, w której obowiązuje 9.07. Za 12 godzin kończą się dwie daty: 10.07 na statku i 9.07 w strefie, do której wpłynął statek. W trym momencie w strefie zaczyna się data 10.07. Na statku załoga dostosowuje się do tej daty. W dzienniku pokładowym po 10.07 pojawia się 10.07 w strefie, do której wpłynął statek. W takim przypadku dzień 10.07 jest dniem liczonym dwa razy.



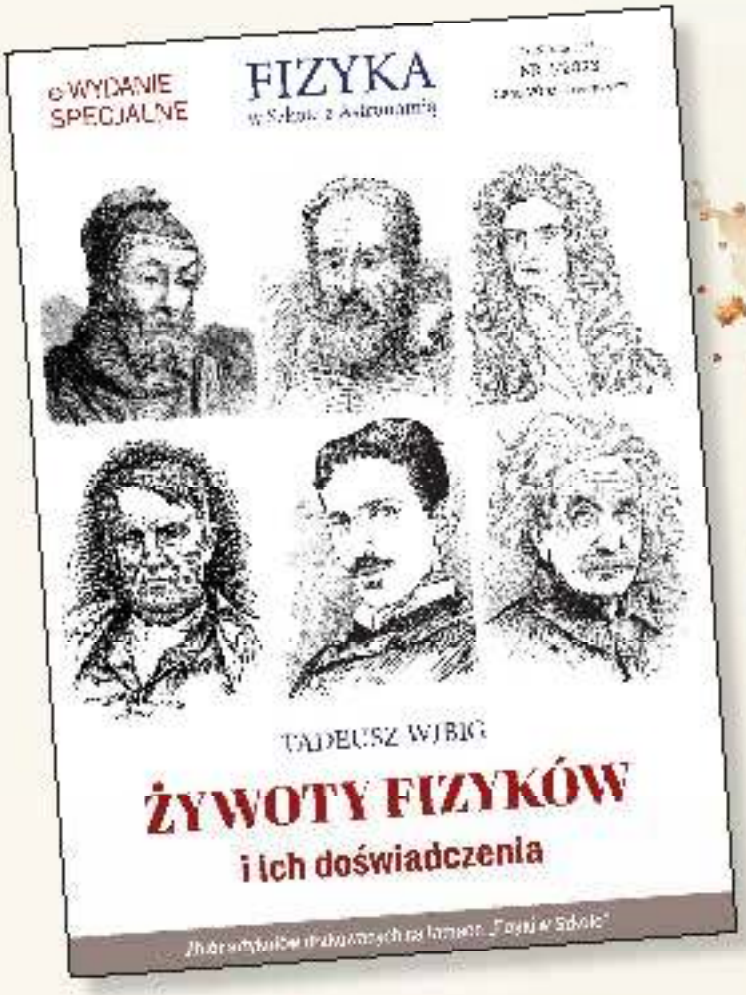
Rys.5. Przekraczanie linii zmiany daty.

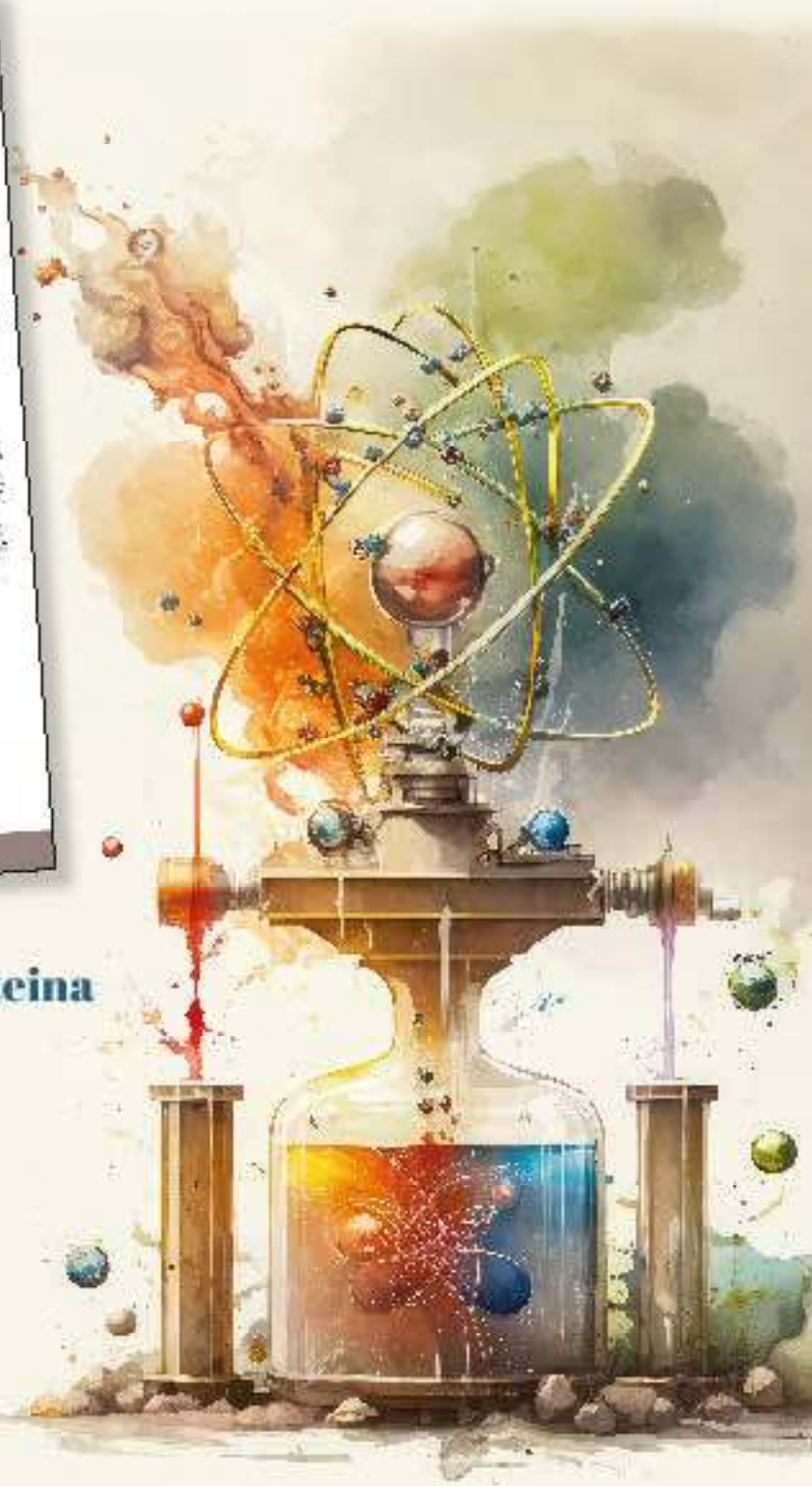


Rys. 6. Fazy Księżyca.

eprasa.pl 0593885dee

Wielcy fizycy
i ich doświadczenia





- ✓ Od Archimedesa po Einsteina
- ✓ Najważniejsze odkrycia
- ✓ 27 wybitnych postaci

Cena
20 zł
(w tym 8% VAT)

WYDANIE SPECJALNE *FIZYKI W SZKOLE*
W WERSJI ELEKTRONICZNEJ – PLIK PDF

Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

Ponadto za podstawę rachuby czasu może także posłużyć:

- ruch obiegowy Księżyca wokół Ziemi, który definiuje pojęcie miesiąca,
- ruch obiegowy Ziemi wokół Słońca, który definiuje pojęcie roku.

Poniżej przedstawiamy najważniejsze definicje terminów stosowanych w astronomii, które są konsekwencją rachuby czasu.

Miesiąc synodyczny – to czas pomiędzy dwiema występującymi po sobie tymi sami fazami Księżyca (np. od nowiu do nowiu, od pełni do pełni, itp.). Średnia wartość tego czasu wynosi 29 dni 12 godzin 44 minuty i 3 sekundy (tj. 29,531 średniej doby słonecznej). Inaczej mówiąc miesiąc synodyczny określa różnicę pomiędzy długością ekliptyczną Słońca i Księżyca.

Poniżej przedstawiamy kilka fotografii tarczy Księżyca podczas różnych jego faz.

Miesiąc gwiazdowy (syderyczny) – to czas, w którym Księżyc obiegnie dokoła Ziemię i wróci do tego samego miejsca na niebie pośród gwiazd. Czas jego trwania wynosi 27 dni 7 godzin 43 minuty i 11.5 sekundy co oznacza, że jest on krótszy od miesiąca synodycznego średnio o około 2 dni.

Miesiąc smoczy (drakoniczny) – to średni czas, w którym Księżyc przechodzi przez dokładnie ten sam węzeł swojej orbity. Czas jego trwania jest równy 27 dni 5 godzin 5 minut i 35.9 sekundy co daje 27.212(2) dnia. Nazwa tego miesiąca odnosi się do mitycznego smoka, który zamieszkuje węzły orbity i pożera Księżyc lub Słońce w czasie zaćmień tych ciał niebieskich. Węzeł wstępujący, w którym znajduje się głowa smoka, określany jest jako *caput draconis*, a w węźle zstępujący usytułowany jest ogonem smoka *cauda draconis*. W tym miejscu wyjaśnimy, że węzły orbity Księżyca usytuowane są w punktach, w których przecina on płaszczyznę ekliptyki.

Rok zwrotnikowy – oznacza czas pomiędzy dwoma przejściami Słońca przez punkty równonocy wiosennej (punkt Barana). Punkt Barana należy do jednego z dwóch punktów przecięcia ekliptyki z równikiem niebieskim. Inaczej mówiąc jest to czas rozpoczęcia astronomicznej wiosny na półkuli północnej. W obecnym – 2022 roku – rozpoczęcie astronomicznej wiosny miało miejsce 20 marca o godzinie 16:33. W tym miejscu warto zauważyć, że punkt Barana obecnie nie znajduje się w konstelacji Barana tylko w gwiazdozbiorze Ryb. Sytuacja ta jest konsekwencją precesji osi obrotu Ziemi, która co 25800 lat zatacza pełny okrąg. Precesja osi obrotu jest konsekwencją oddziaływania grawitacyjnego między Księżycem a Słońcem.

LITERATURA

[1] E. Rybka, 1970, Astronomia ogólna, PWN, Warszawa.
[2] K. Borkowski, 1991, Astronomiczne obliczenie nie tylko dla geografów, UMK Toruń.
[3] P. G. Kulikowski, 1976, Poradnik miłośnika astronomii, PWN, Warszawa.

eprasa.pl 0593885dee

Foto – Dreamstime

Astronomiczna rachuba czasu

cz. 2

W drugiej części artykułu poświęconego astronomicznej rachubie czasu przedstawione zostały przedstawione przykładowe zadania rachunkowe wraz z ich rozwiązaniami, które dotyczą rachuby czasu.

Marcin Wesołowski

Zadanie 1.

Gwiazda o rektascensji $\alpha = 14^h 13^m$ i deklinacji $\delta = +19°.5$ wschodzi w pewnej miejscowości o godzinie $S_w = 5^h 40^m$ miejscowego czasu gwiazdowego. Obliczyć momenty górowania i zachodu gwiazdy w miejscowym czasie gwiazdowym oraz szerokość geograficzną miejsca obserwacji.

Uwaga: dla ułatwienia rozważań wpływ refrakcji atmosferycznej można pominąć.

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać to zadanie skorzystajmy z definicji czasu gwiazdowego S, którą możemy wyrazić jako:

$$S = t + \alpha, \tag{1.1}$$

gdzie t oznacza kąt godzinny a α jest rektascensją. Zauważmy, że w momencie kulminacji górnej kąt godzinny t = 0, wówczas równanie (1.1) przyjmuje postać:

$$S = \alpha. \tag{1.2}$$

Oznacza to, że w momencie kulminacji górnej czas gwiazdowy S jest równy rektascensji α. Dlatego dla momentu górowania czas gwiazdowy wynosi $S_g = 14^h 13^m$.

Od momentu wschodu do momentu górowania upływa:

$$\Delta S = S_g - S_W = 8^h 33^m. \tag{1.3}$$

Ponieważ momenty wschodu i zachodu są symetryczne względem górowania, zatem:

$$S_Z = S_g + \Delta S = 22^h 46^m. \tag{1.4}$$

Aby wyznaczyć szerokość geograficzną miejsca obserwacji wykorzystajmy następującą zależność:

$$\cos t = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi, \tag{1.5}$$

gdzie δ i φ oznaczają odpowiednio deklinację i szerokość geograficzną miejsca obserwacji. Z równania (1.5) łatwo można pokazać że, szerokość geograficzna miejsca obserwacji dana jest jako:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\cos t}{\operatorname{tg}\delta}\right). \tag{1.6}$$

Ponieważ wschód rozważanej gwiazdy miał miejsce o $S_w = 5^h 40^m$ czasu miejscowego, zatem możemy zapisać, że:

$$S_W = \alpha + t_W. \tag{1.7}$$

Przekształcając równanie (1.7) łatwo możemy policzyć że w momencie wschodu kąt godzinny t_W dany jest jako:

$$t_W = S_W - \alpha = -8^h 37^m. \tag{1.8}$$

Podstawmy teraz równanie (1.8) do równania (1.6) i wówczas poszukiwana szerokość geograficzna miejsca obserwacji jest równa $\varphi \approx 60°14'$.

eprasa.pl 0593885dee

Odpowiedź:

Moment górowania gwiazdy ma miejsce o 14^h13^m, moment zachodu gwiazdy ma miejsce o 22^h46^m a szerokość geograficzna miejsca obserwacji wynosi $\varphi \approx 60°14'$.

Zadanie 2.

Kąt godzinny rozważanej gwiazdy jest równy t= $2^h51^m02^s$. Lokalny czas gwiazdowy wynosi S= $4^h17^m20^s$. Obliczyć ile wynosi rektascensja rozważanej gwiazdy?

Uwaga: Przypomnijmy naszym czytelnikom że rektascensja (wznoszenie proste α) – jest to kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną koła wielkiego przechodzącego przez oś świata i dane ciało niebieskie a płaszczyzną przechodzącą przez oś świata i punkt Barana γ - równonocy wiosennej (liczony od punktu Barana w kierunku z zachodu na wschód i wyrażany w mierze czasowej; godzinach, minutach, sekundach).

Rozwiązanie:

Aby rozwiązać to zadanie wykorzystajmy ponownie definicję czasu gwiazdowego (zadanie 1, równanie 1.1):

$$S = \mathrm{t} + \alpha, \tag{2.1}$$

gdzie t oznacza kąt godzinny a α jest rektascensją. Przekształćmy teraz równanie (2.1) w taki sposób aby można było na jego podstawie wyznaczyć poszukiwaną rekalescencję naszej gwiazdy. Wówczas możemy zapisać:

$$\mathrm{S} - \mathrm{t} = \alpha. \tag{2.1}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymujemy, że rektascensja naszej gwiazdy wynosi $\alpha = 1^h26^m18^s$.

Odpowiedź:

Rektascensja rozważanej gwiazdy jest równa $\alpha = 1^h26^m18^s$.

Zadanie 3.

Jaki interwał czasu gwiazdowego upływa od dołowania Kapelli ($\alpha_1 = 5^h15^m$) do górowania Wegi ($\alpha_2 = 18^h36^m$).

Uwaga: Poprzez dołowanie danej gwiazdy (np. Słońca) należy rozumieć moment czasu w którym gwiazda (Słońce) znajduje się najniżej nad horyzontem. Natomiast górowanie gwiazdy (Słońca) oznacza sytuację przeciwną tzn. gwiazda w danym momencie czasu znajduje się najwyżej nad horyzontem.

Rozwiązanie:

W przypadku dołowania gwiazdy możemy zapisać, że:

$$T_{g1} = t_1 + \alpha_1, \tag{3.1}$$

gdzie $t_1 = 12^h$.

Natomiast w przypadku górowania możemy zapisać, że:

$$T_{g2} = t_2 + \alpha_2, \tag{3.2}$$

gdzie $t_2 = 0^h$.

Rys. 1. Wzajemne położenie Wegi i Kapelli (obraz wygenerowano z programu Stellarium na dzień 1.09.2022 godzina 20:00). Gwiazda Kapella znajduje się w górnej części rysunku a Wega w środkowej jego części.

W oparciu o powyższe zależności możemy określić poszukiwany interwał czasu gwiazdowego:

$$\Delta T_g = T_{g2} - T_{g1} = (t_2 + \alpha_2) - (t_1 + \alpha_1) = 1^h21^m. \tag{3.3}$$

Odpowiedź:

Interwał czasu gwiazdowego od dołowania gwiazdy Kapelli do górowania Wegi wynos $\Delta T_g = 1^h21^m$.

Zadanie 4.

Udowodnić, że w dniach równonocy na całej kuli ziemskiej, z wyjątkiem biegunów, dzień trwa 12^h.

Uwaga:

Równonoc określa moment kiedy nasza dzienna gwiazda (Słońce) przechodzi przez jeden z dwóch punktów, w których ekliptyka przecina równik niebieski, czyli koło wielkie leżące w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu sfery niebieskiej. Z taka sytuacją mamy do czynienia dwa razy do roku:

a) 20/21 marca w tym czasie Słońce przechodzi przez punkt Barana. Wówczas na półkuli północnej rozpoczyna się równonoc wiosenna, a w przypadku pokuli południowej równonoc jesienna.
b) 22/23 września w tym czasie Słońce przechodzi przez punkt Wagi. Wówczas na półkuli północnej rozpoczyna się równonoc jesienna, a w przypadku pokuli południowej równonoc wiosenna.

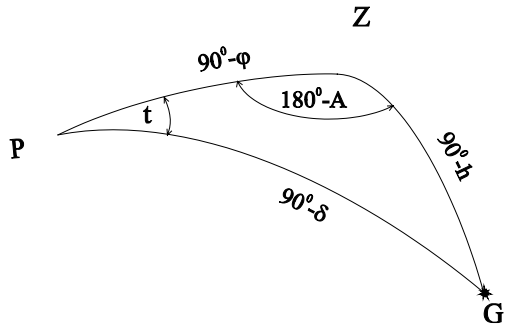
Rozwiązanie:

Aby udowodnić, że dzień na całej kuli ziemskiej (z wyjątkiem biegunów) trwa 12^h skorzystajmy z trójkąta paralaktycznego przestawionego na rys.2.:

W omawianym przypadku słuszne jest więc następujące równanie:

$$\cos z = \sin(\varphi)\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos t. \tag{4.1}$$

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 2. Trójkąt paralaktyczny – inaczej mówiąc trójkąt który położony jest na sferze niebieskiej, w którym są ustalone wierzchołki takie jak: zenit (Z), biegun niebieski (P) oraz obiekt (np. gwiazda – G). Natomiast kąty wierzchołkowe to: azymut (180° – A), kąt godzinny (t) oraz kąt paralaktyczny. Zauważmy, że kąt który jest położony przy obiekcie (gwiazda – G) nie został zaznaczony na rysunku, gdyż w znacznej większości przypadków jest on niepotrzebny do obliczeń.

Jeżeli założymy że:

$$\delta = 0°, \quad -90° < \varphi < 90°, \quad z = 90°.$$

Wówczas równanie (4.1) przyjmuje następującą postać:

$$\cos 90° = \sin(\phi)\sin(\delta) + \cos(\phi)\cos(\delta)\cos t. \tag{4.2}$$

Ponieważ wartość funkcji cos 90° = 0 wówczas otrzymujemy:

$$0 = \sin(\varphi)\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos t. \tag{4.3}$$

Przekształćmy równanie (4.3) w taki sposób aby wyznaczyć cos t:

$$\cos t = -\mathrm{tg}\delta\ \mathrm{tg}\varphi. \tag{4.4}$$

Po podstawieniu powyższych wartości mamy:

$\delta = 0, \quad \cos t = 0$, wówczas $t = \pm 90°$.

Ponieważ 1^h to 15° wówczas t = 6^h.
Zatem poszukiwana długość dnia wynosi: $D = 2t = 12^h$.

Odpowiedź:
Długość dnia na całej kuli ziemskiej z wyjątkiem biegunów trwa 12^h.

Zadanie 5.

Wyznacz godzinę mierzoną czasem gwiazdowym w chwili, gdy kąt godzinny gwiazdy górującej na dwie godziny przed punktem Barana, wynosi 22^h.

Rozwiązanie:
Rozpatrywana gwiazda góruje:

$$T_{g1} = t_g + \alpha_g, \qquad t_g = 0^h. \tag{5.1}$$

Punkt Barana góruje:

$$T_{g2} = t_\gamma = 0^h. \tag{5.2}$$

Wówczas

$$T_{g2} - T_{g1} = 2^h. \tag{5.3}$$

Zatem, po podstawieniu

$$\alpha_g = -2^h, \tag{5.4}$$

$$-2^h + 24^h = 22^h. \tag{5.5}$$

Tak więc górowanie rozpatrywanej gwiazdy wynosi:

$$T_g = \alpha_g + t, \qquad t = 22^h. \tag{5.6}$$

$$T_g = 22^h + 22^h = 44^h + 20^h = 20^h. \tag{5.7}$$

Odpowiedź:
Otrzymany wynik oznacza, że jest następna doba gwiazdowa.

Zadanie 6.

Wyznaczanie daty Wielkanocy jako przykład astronomicznej rachuby czasu.

Z astronomiczną rachubą czasu związane jest między innymi poprawne wyznaczenie daty Wielkanocy. Podczas Soboru Nicejskiego w 325 roku n.e. ustalono, że Wielkanoc należy obchodzić w pierwszą Niedzielę po pierwszej wiosennej pełni Księżyca (tzw. paschalna pełnia Księżyca). Ta zasada jest przełożeniem na solarny w swej naturze kalendarz juliański daty „14 nisan" z religijnego kalendarza hebrajskiego, który jest kalendarzem lunarno – solarnym. Data 14 nisan w kalendarzu hebrajskim oznacza początek święta Paschy, wokół którego miały miejsce wydarzenia zbawcze. Zatem Wielkanoc jest świętem ruchomym. Może ona wypaść najwcześniej 22 marca, a najpóźniej 25 kwietnia.

Istnieje wiele różnych algorytmów służących do wyznaczania daty Wielkanocy, jednak najczęściej stosuje się dwa podejścia. Pierwszym podejściem jest algorytm Gaussa a drugim algorytm Meeusa. Pierwszy algorytm (Gaussa) został już opisany w jednym z naszych poprzednich artykułów (Gronkowski P., Wesołowski M., 2017, Dlaczego Wielkanoc nie ma ustalonej daty?, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 3, str. 9 - 13). Dlatego też w tym artykule skupimy się na analizie podejścia zaproponowanego przez Meeusa, który został opisany w 1991 roku w Astronomical Algorithms.

Schemat algorytmu:

1. Rok dzielimy przez 19 i wyznaczamy resztę a.
2. Rok dzielimy przez 100, a wynik zaokrąglamy w dół (odcinamy część ułamkową) i wówczas otrzymujemy liczbę b.
3. Rok dzielimy przez 100 i wyznaczamy resztę c.
4. Obliczamy: b dzielimy przez 4, wynik zaokrąglamy w dół i wówczas otrzymujemy liczbę d.
5. Obliczamy: b dzielimy przez 4 i wyznaczamy resztę e.
6. Obliczamy: (b + 8) dzielimy przez 25, wynik zaokrąglamy w dół i wówczas otrzymujemy liczbę f.
7. Obliczamy: (b – f + 1) dzielimy przez 3, wynik zaokrąglamy w dół i wówczas otrzymujemy liczbę g.
8. Obliczamy: (19 · a + b – d – g + 15) dzielimy przez 30 i wyznaczamy resztę h.
9. Obliczamy: c dzielimy przez 4 i wynik zaokrąglamy w dół i otrzymujemy cyfrę i.
10. Obliczamy: c dzielimy przez 4 i wyznaczamy resztę k.

eprasa.pl 0593885dee

11. Obliczamy: (32 + 2 · e + 2 · i – h – k) dzielimy przez 7 i otrzymujemy resztę l.
12. Obliczamy: (a + 11 · h + 22 · l) dzielimy przez 451, wynik zaokrąglamy w dół i otrzymujemy liczbę m.
13. Obliczamy: (h + l – 7 · m + 114) dzielimy przez 31 i otrzymujemy resztę p.
14. Dzień Wielkanocy = p + 1.
15. Miesiąc = Zaokrąglenie w dół dzielenia (h + l – 7 · m + 114) przez 31.

Wykorzystując schemat algorytmu Meeusa napisz w dowodnym języku (środowisku) program wyznaczający datę Wielkanocy w latach 2020 – 2050.

Rozwiązanie:

W tym miejscu zachęcamy wszystkich naszych czytelników do samodzielnej pracy. Jako przykładowe rozwiązanie przestawiamy schemat algorytmu Meeusa napisany z wykorzystaniem programu Mathematica.

Powyższy algorytm został zapisany w formie listy:

```
In[1]:=
z = 0;
lista = {};
For[rok = 2020, rok <= 2050, rok += 1,
 dla
a = Mod[rok, 19];
    modulo
 b = Quotient[rok, 100];
     część całkowita ilorazu
 c = Mod[rok, 100];
     modulo
d = Quotient[b, 4];
    część całkowita ilorazu
e = Mod[b, 4];
    modulo
f = Quotient[b + 8, 25];
    część całkowita ilorazu
 g = Quotient[b - f + 1, 3];
     część całkowita ilorazu
h = Mod[19 * a + b - d - g + 15, 30];
    modulo
j = Quotient[c, 4];
    część całkowita ilorazu
k = Mod[c, 4];
    modulo
s = Mod[32 + 2 e + 2 j - h - k, 7];
    modulo
u = Quotient[a + 11 h + 22 s, 451];
    część całkowita ilorazu
x = Quotient[h + s - 7 u + 114, 31];
    część całkowita ilorazu
yn = Mod[h + s - 7 u + 114, 31]; (*dzień Wielkanocy-1*)
     modulo
 miesiac = If[x == 3, marca, kwietnia];
           operator warunkowy
 If[x == 3, z = z + 1, z];
 operator warunkowy
 AppendTo[lista, {N[rok], miesiac, yn + 1}]]
 dołącz na końcu do war··· przybliżenie numeryczne
MatrixForm[lista]
postać macierzy
```

Po wywołaniu programu otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

```
Out[4]//MatrixForm=
( 2020.  kwietnia  12 )
( 2021.  kwietnia   4 )
( 2022.  kwietnia  17 )
( 2023.  kwietnia   9 )
( 2024.    marca   31 )
( 2025.  kwietnia  20 )
( 2026.  kwietnia   5 )
( 2027.    marca   28 )
( 2028.  kwietnia  16 )
( 2029.  kwietnia   1 )
( 2030.  kwietnia  21 )
( 2031.  kwietnia  13 )
( 2032.    marca   28 )
( 2033.  kwietnia  17 )
( 2034.  kwietnia   9 )
( 2035.    marca   25 )
( 2036.  kwietnia  13 )
( 2037.  kwietnia   5 )
( 2038.  kwietnia  25 )
( 2039.  kwietnia  10 )
( 2040.  kwietnia   1 )
( 2041.  kwietnia  21 )
( 2042.  kwietnia   6 )
( 2043.    marca   29 )
( 2044.  kwietnia  17 )
( 2045.  kwietnia   9 )
( 2046.    marca   25 )
( 2047.  kwietnia  14 )
( 2048.  kwietnia   5 )
( 2049.  kwietnia  18 )
( 2050.  kwietnia  10 )
```

Odpowiedź:

W powyższej liście wyznaczone zostały daty Wielkanocny w latach 2020-2050 w oparciu o algorytm Meeusa.

eprasa.pl 0593885dee

Wybrane zagadnienia astrofizyki gwiazdowej

cz. I

Foto – Dreamstime

Marcin Wesołowski

Podstawowym źródłem informacji o gwiazdach jest ich widmo, które charakteryzuje się rozkładem natężenia poszczególnych linii widmowych. Inaczej mówiąc widmo informuje nas o stopniu wzbudzenia fotosfery. Na tej podstawie możemy oszacować temperaturę i ciśnienie panujące w fotosferze gwiazdy. W tym miejscu przypomnijmy, że fotosfera rozważanej gwiazdy (np. Słońca) to najbardziej zewnętrzna, powierzchniowa warstwa gwiazdy.

W tym miejscu ponownie zwracam się z apelem o przestrzeganie zasad towarzyszących bezpiecznej obserwacji tarczy Słońca.

Jasność gwiazd

W astronomii jasność definiuje się jako całkowitą ilość energii elektromagnetycznej emitowanej w jednostce czasu (strumień promieniowania, F) przez gwiazdę, galaktykę lub inne ciało niebieskie np. kometę. Termin ten służy do określenia pozornej jasności obiektu, czyli jak jasny jest obiekt dla obserwatora. Jasność ciała niebieskiego m, która odpowiada strumieniowi promieniowania F dana jest następującą zależnością:

$$m = -2,5\log_{10}F + C = -2,5\log F + C. \qquad (1)$$

Jednostką jasności danego ciała niebieskiego jest wielkość gwiazdowa, która zwana jest także jako magnitudo. Zauważmy, że w równaniu (1) po jego prawej stronie pojawiła się stała C, która ustala punkt zerowy dla logarytmicznej skali jasności i może być przyjęta w całkowicie dowolny sposób. Wykorzystując równanie (1) zapiszmy je dla dwóch dowolnych źródeł światła:

$$\begin{cases} m_1 = -2,5\log F_1 + C, \\ m_2 = -2,5\log F_2 + C. \end{cases} \qquad (2)$$

Dla układu równań (2) wykonajmy teraz odejmowanie stronami, wówczas otrzymamy, że:

$$m_1 - m_2 = -2,5\log F_1 + C - \left(-2,5\log F_2 + C\right). \qquad (3)$$

Przekształcając równanie (3) możemy zapisać, że:

$$m_1 - m_2 = -2,5\log F_1 + C + 2,5\log F_2 - C. \qquad (4)$$

Wykonajmy teraz redukcję wyrazów podobnych w równaniu (4):

$$m_1 - m_2 = -2,5\log F_1 + 2,5\log F_2. \qquad (5)$$

Następnie wyłączmy przed nawias stały czynnik -2.5, co możemy wyrazić jako:

$$m_1 - m_2 = -2,5\left(\log F_1 - \log F_2\right). \qquad (6)$$

Prawą stronę równania (6) możemy nieco uprościć wykorzystując własności logarytmów – logarytm ilorazu dwóch liczb jest równy różnicy logarytmów tych liczb. Wówczas równanie (6) możemy wyrazić w następującej postaci:

eprasa.pl 0593885dee

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}. \quad (7)$$

Zauważmy, że $\Delta m = m_1 - m_2$, więc równanie (7) jest równe:

$$\Delta m = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2}. \quad (8)$$

Jeżeli założymy, że różnica jasności Δm = 1 magnitudo, odpowiada to stosunkowi strumieni:

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{(m_2 - m_1)/2,5} = 10^{1/2,5} = 10^{0.4} = 2,512. \quad (9)$$

Wielkość strumienia, który dobiega od rozpatrywanej gwiazdy do obserwatora w głównej mierze zależy od dwóch czynników. Pierwszy z nich stanowi całkowita moc promieniowania wysyłanego przez gwiazdę, a drugim czynnikiem jest odległość gwiazdy. Jeżeli pominiemy wpływ odległości wówczas będziemy mówić o jasności absolutnej badanej gwiazdy.

Rozważmy teraz następujący przykład: wyobraźmy sobie dowolną gwiazdę, która znajduje się w odległości r i ma ona jasność obserwowalną m. Dokonując myślowego zabiegu, przenieśmy tę samą gwiazdę na odległość r_0 i ponownie zmierzmy jej jasność, którą oznaczymy jako M. Zauważmy, że w pustej przestrzeni strumień jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości, więc pomiędzy strumieniem wyjściowym F a strumieniem F_0 jaki zarejestrowalibyśmy w nowej lokalizacji r_0 zachodzi związek:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (10)$$

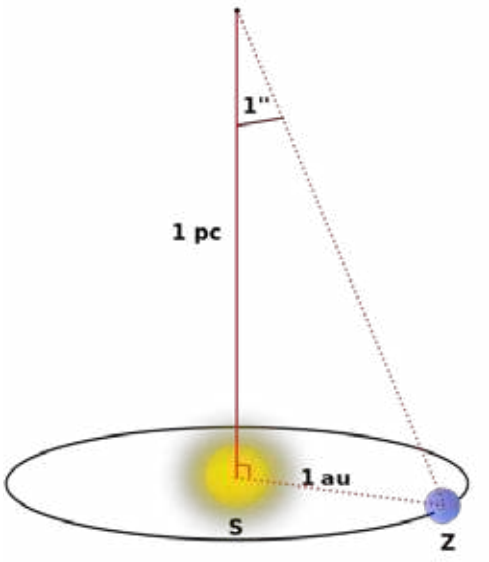
Wykorzystując ponownie zależność (7) możemy zapisać, że:

$$m - M = -2,5 \log \frac{F}{F_0} = 5 \log r - 5 \log r_0. \quad (11)$$

Jeżeli odległość r wyrazimy w parsekach i założymy umownie, że r_0 = 10 pc wówczas równanie (11) dane jest jako:

$$m - M = 5 \log r - 5 \log 10. \quad (12)$$

Fotografia jasnej gwiazdy Alfa Centauri, która jest najbliższym Układowi Słonecznemu układem gwiezdnym. Foto: NASA.



Rys. 1. Graficzna ilustracja parseka.

Przypomnijmy, że parsek to odległość, dla której kąt paralaksy (równy połowie kąta całkowitej rocznej zmiany) położenia Ziemi widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity wynosi 1 sekundę łuku. Graficzną ilustrację parsek przedstawiono na rys. 1.

Zauważmy, że zgodnie z początkowym naszym założeniem podstawa logarytmu była równa 10 więc równanie (12), a w szczególności drugi człon po jego prawej stronie nieco się upraszcza, to znaczy, że: $5 \log_{10} 10 = 5$. Wówczas otrzymujemy, że:

$$m - M = 5 \log r - 5. \quad (13)$$

Przekształcając równanie (13), obliczmy na jego podstawie jasność gwiazdy M, wówczas mamy:

$$M = m + 5 - 5 \log r. \quad (14)$$

Dodatkowo na podstawie rys. 1. możemy zapisać:

$$1\,pc = \frac{1\,au}{\tan(1'')} = \frac{1\,au}{\tan\left(\frac{1}{60 \cdot 60} \cdot \frac{\pi}{180}\right)} = \frac{648000}{\pi} au$$
$$= 206264,81\,au. \quad (15)$$

Dodatkowo, aby podkreślić skalę odległości wyrażoną poprzez parsek przeliczmy go jeszcze na podstawową jednostkę odległości stosowaną w fizyce, czyli metry. Wiedząc, że: 1 au = 149597870700 m otrzymujemy:

$$1\,pc = 206264,81\,au = 3,085677581 \cdot 10^{16}\,m. \quad (16)$$

Otrzymany parametr M dany równaniem (14) jest jasnością absolutną. Zauważmy, że równanie (14) jest poprawne przy założeniu pustej przestrzeni międzygwiezdnej, gdzie zakładamy, że zmiana strumienia świetlnego zachodzi wyłącznie z przyczyn czysto geometrycznych. W rzeczywistym przypadku światło dochodzące do obserwatora jest osłabiane w wyniku jego oddziaływania z materią międzygwiazdową. Zjawisko to opisujemy poprzez ekstynk-

eprasa.pl 0593885dee

cję międzygwiazdową (poczerwienienie międzygwiazdowe). Oznacza to sumę procesów pochłaniania i rozpraszania światła w przestrzeni międzygwiazdowej przez znajdującą się tam materię (pył i gaz) między emitującym obiektem astronomicznym a obserwatorem.

Ekstynkcję w widmie ciągłym powoduje wyłącznie materia pyłowa. W związku z tym ciała niebieskie wydają się dla obserwatora mniej jasne i bardziej czerwone niż są w rzeczywistości (synonim ekstynkcji – poczerwienienie). Wynika to z faktu, że ekstynkcja maleje ze wzrostem długości fali światła. Dlatego gołym okiem nie jesteśmy w stanie obserwować centrum naszej Galaktyki, mimo że można je badać w innych zakresach widma, np. w zakresie mikrofal. Obecność ziaren pyłu w obłokach międzygwiazdowych odgrywa kluczową rolę w procesach formowania gwiazd.

W astrofizyce gwiazdowej pomiary strumienia promieniowania prowadzi się zazwyczaj w skończonym zakresie widmowym, który definiowany jest poprzez przepuszczalność filtru barwnego Φ(λ) i czułość widmową odbiornika p(λ). Niech łączny wynik działania odbiornika i filtra dany jest jako:

$$f(\lambda) = p(\lambda)\varphi(\lambda), \tag{17}$$

a norma funkcji f(λ) jest dano jako:

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda = 1. \tag{18}$$

Zauważmy, że funkcja f(λ) wyznacza pasmo fotometryczne (inaczej barwę) dla którego określona jest jasność ciała niebieskiego (np. gwiazdy) o rozkładzie widmowym promieniowania:

$$m_f = -2.5\log\int_0^\infty F(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda + \text{const}. \tag{19}$$

Zazwyczaj w celu charakterystyki danego pasma wygodnie jest posłużyć się średnią długością fali (równanie (20)) lub efektywnej długości fali (równanie (21)):

$$\lambda_0 = \frac{\int_0^\infty f(\lambda)\lambda\,d\lambda}{\int_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda}, \tag{20}$$

$$\lambda_{ef} = \frac{\int_0^\infty f(\lambda)F(\lambda)\lambda\,d\lambda}{\int_0^\infty f(\lambda)F(\lambda)\,d\lambda}. \tag{21}$$

Analizując równanie (20) można zauważyć, że średnia długość fali jest całkowicie określona przez widmowy przebieg czułości fotometru. Natomiast z analizy równania (21) wynika, że aktywna długość fali zależy zarówno od czułości fotometru i rozkładu widmowego obserwowanego promieniowania.

Wyznaczanie odległości do gwiazdy

Obliczenie odległości do gwiazd stanowi jeden z fundamentalnych zagadnień wpisujących się w astrofizykę gwiazdową. Wyznaczenie tego parametru umożliwia wyobrażenie o skali odległości we Wszechświecie, a także za jego pomocą możemy obliczyć inne ważne parametry. Określając odległość do gwiazd należy dokonać pomiaru kąta paralaksy heliocentrycznej gwiazdy. Inaczej mówiąc należy wykorzystać metodę paralaksy trygonometrycznej, w której podstawę (bazę) stanowi orbita Ziemi wokół Słońca, a pomiar kierunku do danej gwiazdy dokonujemy w odstępnie czasu co pół roku. Metodologia takiego pomiaru została przedstawiona na rys.2.

Podkreślmy, że obserwacje astronomiczne w praktyce sprowadzają się do śledzenia (pomiaru) zmiany położenia monitorowanej gwiazdy na tle innych. Na podstawie rysunku 2 w łatwy sposób można zauważyć, że pomiędzy kątem paralaksy π, a odległością d od Słońca do danej gwiazdy zachodzi prosta zależność:

$$\operatorname{tg}\pi = \frac{a}{d}. \tag{22}$$

Zauważmy, że zależność dana równaniem (22) wynika bezpośrednio z definicji funkcji trygonometrycznej tangens. Ponieważ kąt paralaksy π jest bardzo mały, więc tangens kąta paralaksy π jest w przybliżeniu równy wartości tego kąta wyrażonego w radianach. Dokładniej mówiąc obowiązuje tu następujący wzór: $\operatorname{tg}\pi \approx \pi$.

Jeżeli kąt paralaksy π wyrazimy w sekundach łuku, a odległość układu Ziemia – Słońce przyjmiemy jako jedną jednostkę astronomiczną (1 au) to odległość do gwiazdy będzie dana jako:

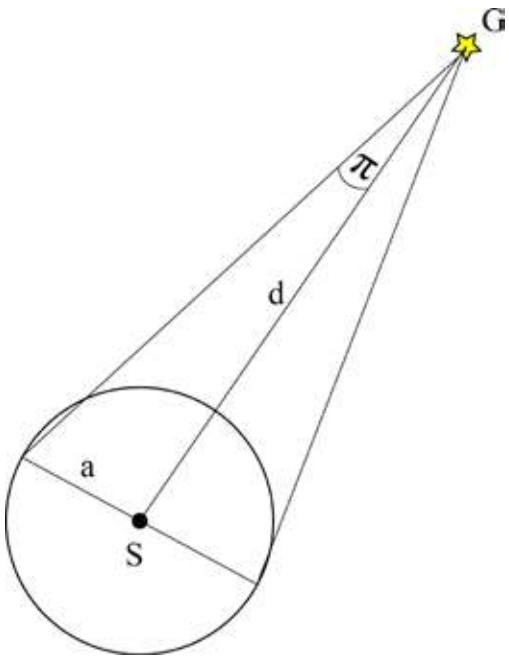
$$d = \frac{206264{,}81}{\pi''}\,\text{au}, \tag{23}$$

gdzie w liczniku równania (23) wykorzystaliśmy wartość z równania (15).

W rzeczywistości wartości kąta paralaksy π są bardzo małe i nawet dla najbliższych gwiazd nie przekraczają jednej sekundy łuku, dlatego też w astronomii powszechnie używamy jednostek o większych zakresach np. rok świetlny czy wspomniany już parsek.

Foto – Adobe Stock

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 2. Paralaksa heliocentryczna, na rysunku przyjęto następujące oznaczenia: S to Słońce, G to badana gwiazda, a jest średnią odległością Ziemi os Słońca, d jest poszukiwaną odległością do obserwowanej gwiazdy, a π jest kątem paralaksy. Zauważmy, że gwiazda G znajduje się w płaszczyźnie orbity Ziemi.

Jeżeli odległość d do danej gwiazdy wyrazimy w parsekach, a paralaksę w sekundach łuku to równanie (24) przyjmuje następującą postać:

$$d = \frac{1}{\pi''}\,\mathrm{pc}. \qquad (24)$$

Jako przykład obliczmy w parsekach odległość najbliższej gwiazdy od Słońca – Proxima Centauri, która jest gwiazdą typu czerwony karzeł znajdującą się około 4,24 lat świetlnych od Ziemi, w gwiazdozbiorze Centaura. Jednakże jej blask jest zbyt słaby, aby można ją było dostrzec gołym okiem. W obliczeniach przyjmijmy, że paralaksa heliocentryczna tej gwiazdy jest równa $\pi = 0'',76850$.

Wykorzystując równanie (24) możemy zapisać, że:

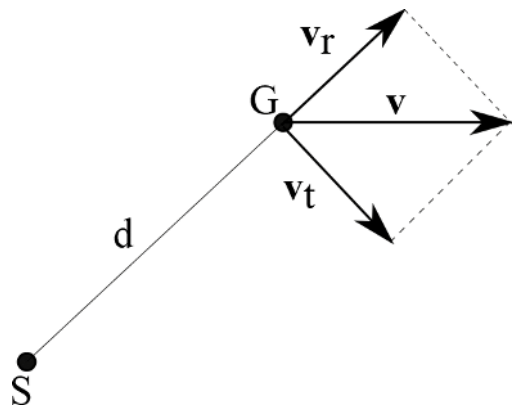
$$d = \frac{1}{0'',76850} \approx 1,3\,\mathrm{pc}.$$

<u>Uwaga:</u>

Ze względu na duże odległości do gwiazd przedstawiona prosta metoda paralaks trygonometrycznych może być stosowana tylko do najbliższych gwiazd.

Prędkość gwiazdy

W układzie związanym ze Słońcem wektor prędkości v danej gwiazdy możemy rozłożyć na dwie składowe: tangencjalna v_t czyli składową prostopadłą do kierunku widzenia i radialną v_r czyli składową równoległą do tego kierunku. Prędkość tangencjalna v_t określa zmianę położenia danej gwiazdy na tle innych z reguły bardziej odległych gwiazd. Oznacza to, że składowa tangencjalna prędkości jest obserwowana jako ruch władny gwiazdy na niebie. Rozkład tych dwóch składowych prędkości został przedstawiony na rys.3.



*Rys. 3. Rozkład wektora prędkości rozważanej gwiazdy na dwie składowe: tangencjalna i radialną. Na rysunku przyjęto następujące oznaczenia: S to Słonce, G to gwiazda, d to odległość gwiazdy od Słońca, **v** to prędkość gwiazdy, $\mathbf{v}_t$ i $\mathbf{v}_r$ to składowe prędkości gwiazdy odpowiednio tangencjalna i radialna.*

Wykorzystując nasz wcześniejsze rozważania wynikające z mechaniki nieba oraz twierdzenie Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2. \qquad (25)$$

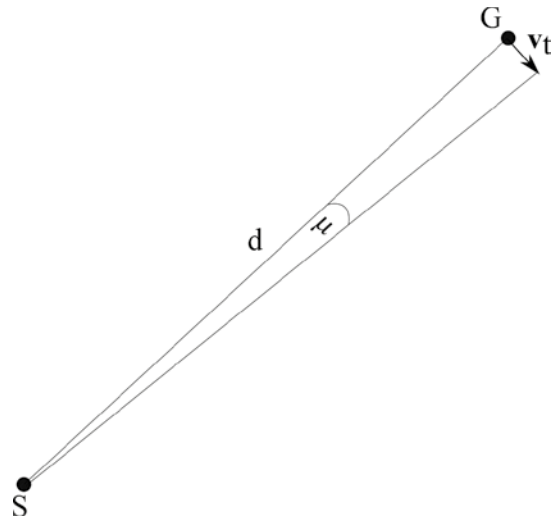
Zauważmy, że ruch własny gwiazdy μ zazwyczaj wyraża się w sekundach łuku na rok. Oznacza to, że znając ruch własny rozpatrywanej gwiazdy możemy określić wartość o jaki kąt na niebie gwiazda ta przesunie się w ciągu roku na tle innych odległych gwiazd. Znając odległość układu Słońce – rozpatrywana gwiazda i jej ruch własny, który jest małym kątem możemy obliczyć wartość prędkości tangencjalnej korzystając z rys. 4.

Wówczas mamy:

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{v_t}{d}. \qquad (26)$$

Po prostych przekształceniach mamy:

$$v_t = d \cdot \mathrm{tg}\,\mu = d\,\frac{\mu''}{206264,81}. \qquad (27)$$



Rys. 4. Składowa tangencjalna prędkości v_t gwiazdy i jej ruch własny μ. Ponadto przyjęto, że: S to Słonce, G to gwiazda, d to odległość gwiazdy od Słońca.

eprasa.pl 0593885dee

Zauważmy, że obliczona w ten sposób prędkość tangencjalna wyrażona jest w parsekach na rok. Wykonajmy teraz dla porządku przeliczenie tej prędkości na bardziej powszechne jednostki np. km/s. W tym celu wykorzystajmy ponownie równanie (16) oraz przypomnijmy, że:

$$\begin{aligned} 1\,\text{rok} &= 365{,}2422\,\text{doby} = 365{,}2422 \cdot 24\,\text{godziny} = \\ &= 365{,}2422 \cdot 24 \cdot 60\,\text{minut} \\ &= 365{,}2422 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 3{,}156 \cdot 10^{7}\,\text{s}. \end{aligned} \tag{28}$$

Wykorzystując równania (16), (27) i (28) ostatecznie możemy zapisać, że:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{3{,}085677581 \cdot 10^{13}}{3{,}156 \cdot 10^{7} \cdot 206264{,}81} \cdot d\mu'' = 4{,}74011 \cdot d\mu'' \\ &= 4{,}74011 \cdot \frac{\mu''}{\pi''}\left[\text{km} \cdot \text{s}^{-1}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Podkreślmy, że ruch własny gwiazdy wyrażony został w sekundach łuku na rok, a jej paralaksa w sekundach łuku a prędkość w km/s.

Druga składowa prędkości gwiazdy, czyli prędkość radialna jest mierzona w oparciu o zjawisko Dopplera. Zgodnie z tym zjawiskiem długość fali światła dobiegająca do obserwatora od badanej gwiazdy (czyli w tym przypadku źródła), które oddala się z prędkością v_r wynosi:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c}\right). \tag{30}$$

W równaniu (30) poszczególne symbole oznaczają: λ_0 jest to długość fali, która jest wysyłana przez gwiazdę (źródło światła), a *c* stanowi prędkość światła. Zauważmy, że oddalanie się od gwiazdy jako źródła światła powoduje przesunięcie linii widmowych w kierunku podczerwieni. Natomiast jeżeli źródło światła zbliża się do obserwatora będzie dawało to przesunięcie linii widmowych w kierunku fioletu. Oznaczmy jeszcze różnice w długości fali wysyłanej i odbieranej przez $\Delta\lambda$, które jest równe:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0. \tag{31}$$

Wykonując proste przekształcenie równania (30) możemy zapisać, że:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_0 \frac{v_r}{c}. \tag{32}$$

Następnie przekształćmy dalej równanie (32):

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v_r}{c}. \tag{33}$$

Pomóżmy teraz obustronnie równanie (33) przez *c* i wykorzystajmy jednocześnie zależność (31), wówczas mamy:

$$\Delta\lambda\, c = \lambda_0\, v_r. \tag{34}$$

Wówczas ostatecznie otrzymujemy, że:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c. \tag{35}$$

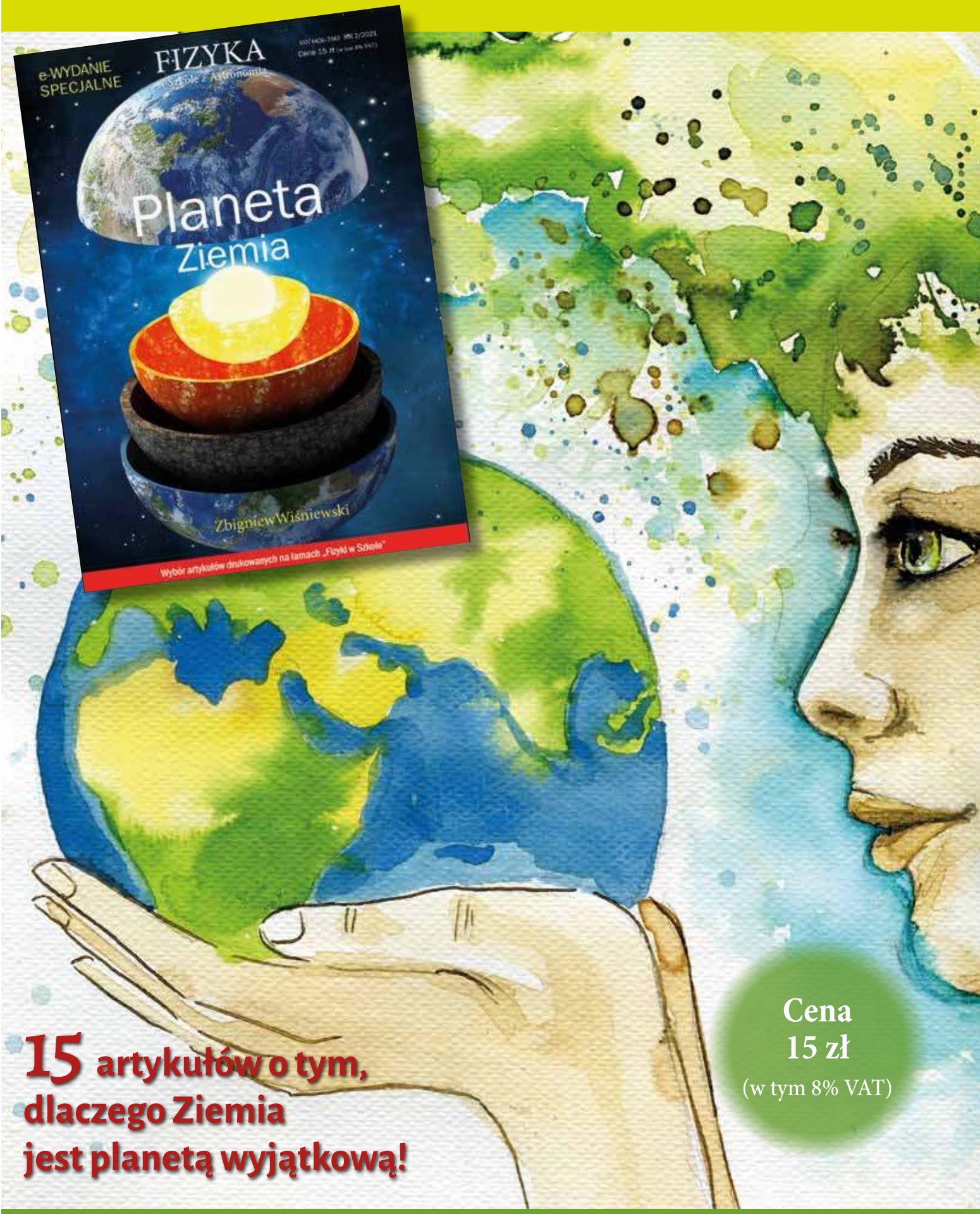
Jeżeli $\lambda > \lambda_0$ to składowa radialna prędkości gwiazdy (źródła światła) ma wartość dodatnią i źródło oddala się od obserwatora. Natomiast jeżeli $\lambda < \lambda_0$ to składowa radialna prędkości gwiazdy (źródła światła) ma wartość ujemną, wówczas gwiazda zbliża się do obserwatora.

Literatura:

[1] Kreiner J. M., Astronomia z astrofizyką, Wydawnictwo Naukowe PWN 1988.
[2] Kubiak M., Gwiazdy i materia międzygwiazdowa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
[3] Rybka E., Astronomia ogólna, Wydawnictwo Naukowe PWN 1970.
[4] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. I, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 1, str. 44-50.
[5] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. II, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 2, str. 46-50.
[6] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. III, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 3, str. 43-50.

eprasa.pl 0593885dee

WYDANIE SPECJALNE W WERSJI ELEKTRONICZNEJ – PLIK PDF



15 artykułów o tym, dlaczego Ziemia jest planetą wyjątkową!

Cena 15 zł
(w tym 8% VAT)

Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

eprasa.pl 0593885dee

Wybrane zagadnienia astrofizyki gwiazdowej

cz. II

Foto – Adobe Stock

Marcin Wesołowski

Nasza obecna wiedza o budowie wewnętrznej struktury gwiazd opiera się w głównej mierze na obserwacjach astronomicznych, które dotyczą Słońca – jedynej gwiazdy w Układzie Słonecznym. Do tych obserwacji należy przygotować się z dużą stronnością, ponieważ obserwowana wielkość gwiazdowa Słońca jest równa $m_S = -26.7$ magnitudo. Oznacza to, że Słońce jest bardzo jasnym ciałem niebieskim i obserwacje jego tarczy bez specjalistycznego zabezpieczenia naszego wzroku mogą być przyczyną uszkodzenia lub w ekstremalnych sytuacjach utraty wzroku nawet na całe życie. Podkreślmy, że wielkość gwiazdowa danego obiektu zależy od mocy promieniowania, czyli jego jasności oraz od odległości od Ziemi. Zauważmy, że skala jasności stosowana powszechnie w astronomii jest odwrócona. Oznacza to, że im wielkość gwiazdowa obserwowanego obiektu jest matematycznie mniejsza, tym jego jasność jest większa.

Rozważając fizyczną ewolucje gwiazd posłużymy się Słońcem. W oparciu o prawa fizyki można przedstawić model ewolucji Słońca, który uwzględnia warunki panujące we wnętrzu naszej dziennej gwiazdy. Używając sformułowania „nasza dzienna gwiazda" mamy na myśli Słońce. Analizując dane obserwacyjne można zauważyć, że w dużej mierze odnoszą się one do trzech podstawowych parametrów takich jak: masa gwiazdy (M), promień gwiazdy (R) oraz ilość energii emitowanej przez gwiazdę w jednostce czasu (L). Dodatkową informacją wynikającą z bezpośrednich obserwacji jest skład chemiczny atmosfery gwiazdy.

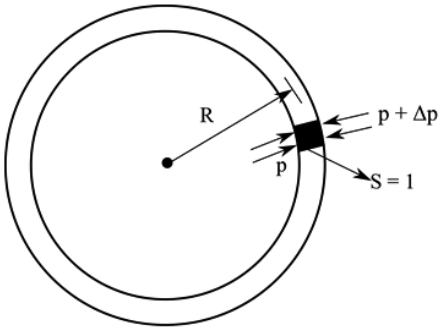
Model gwiazdy

Konstruując model fizyczny gwiazdy dla uproszczenia naszych rozważań załóżmy, że gwiazda stanowi idealną kulę gazu doskonałego dla którego obowiązują prawa gazowe. Wówczas musimy założyć, że:

- Gwiazda pozostaje w równowadze hydrostatycznej (ciśnienie gazu, a w jądrze również ciśnienie promieniowania, równoważone przez siły grawitacji) i termodynamicznej w długim okresie. Oznacza to, że nie ulegają zmianie promień gwiazdy oraz moc promieniowania, a cała energia, która została wytworzona we wnętrzu gwiazdy jest wypromieniowana przez warstwy zewnętrzne.
- Emitowana energia jest zastępowana energią, produkowaną we wnętrzu gwiazdy (jest to tzw. zasada równowagi termicznej: poszczególne warstwy gwiazdy mają stałe temperatury).
- Transport energii w gwieździe następuje poprzez promieniowanie i konwekcję (unoszenie).
- Gaz zawarty w gwieździe w tym również w jej środku w przybliżeniu spełnia równanie stanu gazu doskonałego.
-

Konstruując model gwiazdy załóżmy, że nasze rozważania będą dotyczyły Słońca. W celu wyprowadzenia równań opisujących warunki panujące w wnętrzu Słońca o promieniu R, zakładamy, że zbudowane jest ono z koncentrycznych warstw o grubości Δr. Poprzez koncentryczność warstwy należy rozumieć warstwy, które mają wspólny środek i są ułożone wokół niego, jak okręgi lub sfery. Grubość takiej warstwy jest na tyle mała, że we wnętrzu takiej gwiazdy nie zachodzą istotne zmiany w warunkach

eprasa.pl 0593885dee



Rys. 1. Fragment (prostopadłościan) materii we wnętrzu gwiazdy (np. Słońca), zauważmy, że wysokość boku prostopadłościanu jest równa Δr.

fizycznych przy przejściu od wewnętrznej do zewnętrznej granicy warstwy.

Załóżmy, że w odległości R od środka rozważanej gwiazdy (Słońca) zlokalizowany jest bardzo mały prostopadłościan, którego wysokość wynosi Δr i powierzchnia podstawy ma wartość równą S = 1. Wówczas objętość takiego prostopadłościanu (wycinka materii gwiazdowej) jest równa:

$$V = S \cdot \Delta r = \Delta r. \tag{1}$$

Niech gęstość materii gwiazdowej będzie równa ρ(r) i jest ona zależna od odległości od centrum (środka) Słońca. Wówczas można obliczyć, że masa tego prostopadłościanu (wycinka materii gwiazdowej) jest równa:

$$M = \rho(r) \cdot V. \tag{2}$$

Wykorzystując równanie (1), zależność (2) można zapisać jako:

$$M = \rho(r) \cdot \Delta r. \tag{3}$$

Ponieważ w naszych rozważaniach założyliśmy, że gwiazda jest idealną kulą wówczas w oparciu o prawo grawitacji Newtona, przyspieszenie grawitacyjne g(r) w miejscu położenia prostopadłościanu jest wywołane przez masę M(r), która zawarta jest w kuli o promieniu r jest równe:

$$g(r) = G\frac{M(r)}{R^2}, \tag{4}$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji.

Zauważmy, że nasz prostopadłościan będzie przyciągany do środka Słońca z siłą F(r), która jest równa:

$$F(r) = M(r)\,g(r) = G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r)\,\Delta r. \tag{5}$$

Jeżeli w danej gwieździe nie występowałaby siła, która równoważy siłę ciężkości to rozważany element (nasz hipotetyczny prostopadłościan) w bardzo szybkim tempie opadłby w kierunku środka gwiazdy. Oznacza to, że gwiazda zaczęłaby się gwałtownie kurczyć – zapadać się pod wpływem grawitacji (kolaps grawitacyjny). W tym miejscu wyjaśnimy, że kolaps grawitacyjny zaliczany jest do powszechnych procesów zachodzących w całym Wszechświecie i dotyczy różnych skali przestrzennych i czasowych począwszy od powstawania gromad galaktyk, galaktyk aż do narodzin, ewolucji i śmierci gwiazdy. Ze zjawiskiem tym mamy do czynienia, kiedy niemożliwe jest zachowanie równowagi hydrostatycznej tzn., kiedy ciśnienie gazu nie jest w stanie zrównoważyć odziaływań grawitacyjnych zachodzących wewnątrz gwiazdy. Obraz taki występuje wtedy, gdyż skupisko materii przekroczy masę krytyczną (masę Jeansa).

Równowaga hydrostatyczna – pierwszy przypadek

W przypadku gwiazd siłą równoważącą siłę grawitacji jest ciśnienie gazu (siła parcia) związana z materią gwiazdową (materią słoneczną). Zauważmy, że ciśnienie gazu działa zarówno na zewnętrzną jak i wewnętrzną podstawę prostopadłościanu. W przypadku zewnętrznej strony ciśnienie różni się o wartość Δp od ciśnienia oddziaływującego na stronę wewnętrzną, przy czym Δp ma znak ujemny, ponieważ wartość ciśnienia przy oddalaniu się od środka maleje (Rys.1). Różnica tych ciśnień, czyli parć równoważy siłę ciężkości, co można zapisać jako:

$$p - (p + \Delta p) = G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r)\,\Delta r. \tag{6}$$

Rozpisując lewą stronę równania (6) otrzymujemy:

$$p - p - \Delta p = G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r)\,\Delta r. \tag{7}$$

Wykonując redukcję wyrazów podobnych oraz mnożąc równanie (7) obustronnie przez (-1) mamy:

$$\Delta p = -G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r)\,\Delta r. \tag{8}$$

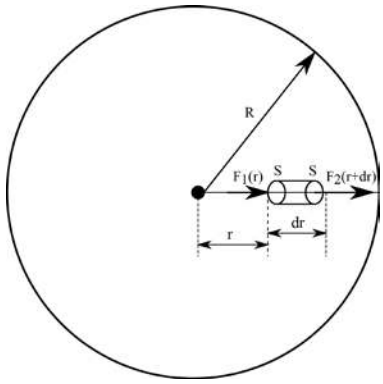
Otrzymane równanie (8) stanowi pierwsze z równań dotyczące budowy wewnętrznej gwiazdy i przedstawia równowagę hydrostatyczną w jej wnętrzu. Jeżeli spełnione są powyższe założenia to równanie (8) możemy wyrazić w postaci różniczkowej:

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r), \tag{9a}$$

lub

$$\frac{dp}{dr} = -g(r)\,\rho(r). \tag{9b}$$

Zauważmy, że równanie (9b) powstało przy wykorzystaniu zależności (4).



Rys.2. Rozkład sił działających na mały wycinek masy we wnętrzu gwiazdy.

eprasa.pl 0593885dee

Równowaga hydrostatyczna – drugi przypadek

Załóżmy, że w gwieździe panują warunki równowagi hydrostatycznej tzn. siły grawitacji dążą do przyspieszenia rozważnego wycinka masy gwiazdy ku jej centrum są równoważone przez siły związane z hydrostatycznym parciem gazu (rys.2).

Wówczas słuszne jest następujące równanie:

$$F_g = F_1(r) - F_2(r+dr). \tag{10}$$

Wykorzystując wzór na siłę grawitacji ($F_g = mg(r)$) i siłę parcia ($F_p = pS$) równanie (10) przyjmuje postać:

$$dm\, g(r) = p(r)S - p(r+dr)S. \tag{11}$$

Następnie wykorzystajmy zależność, że:

$$dm = \rho(r)V, \tag{12}$$

$$dm = \rho(r)S\,dr. \tag{13}$$

Wówczas równanie (11) przyjmuje następującą postać:

$$\rho(r)S\,g(r)\,dr = p(r)S - p(r+dr)S. \tag{14}$$

Dzieląc obustronnie równanie (14) przez S mamy:

$$\rho(r)\,g(r)\,dr = p(r) - p(r+dr). \tag{15}$$

Pomnóżmy obustronnie teraz równanie (15) przez (-1) i jednocześnie podzielmy go przez dr, wówczas mamy:

$$-\rho(r)\,g(r) = \frac{p(r+dr) - p(r)}{dr}. \tag{16}$$

Zauważmy, że prawa strona równania (16) jest granicą ilorazu różnicowego, czyli pochodną funkcji dp/dr, wówczas mamy, że:

$$-\rho(r)\,g(r) = \frac{dp(r)}{dr}. \tag{17a}$$

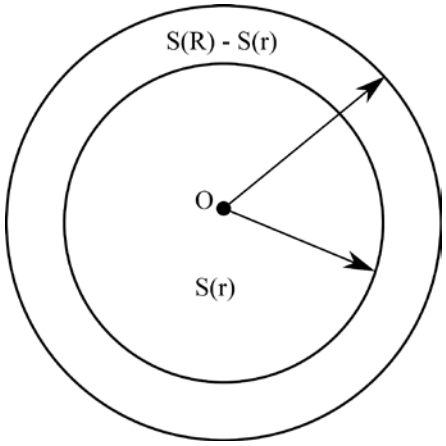
Zastosujemy teraz ponownie równanie (4) do lewej strony zależności (17a) wówczas otrzymamy, że:

$$-\rho(r)\,G\frac{M(r)}{r^2} = \frac{dp(r)}{dr}. \tag{17b}$$

Wykorzystując równania (8) i (9a) oraz (17a) i (17b) można oszacować zmianę ciśnienia we wnętrzu rozważnej gwiazdy przy przejściu z jednej warstwy koncentrycznej do kolejnej. W takim przypadku jako znane parametry należy przyjąć: masę M zawartą we wnętrzu kuli o ustalonym promieniu R oraz gęstość ρ, która występuje w tej warstwie. W większości przypadków parametry te nie są znane, dlatego też do ich określenia konieczne jest zdefiniowanie dodatkowych zależności.

Niech S(r) oznacza powierzchnię kuli o promieniu r, dla której środek pokrywa się ze środkiem gwiazdy zgodnie z rysunkiem 3.

Niech M(r, t) oznacza masę zawartą w kuli S(r), wówczas



Rys.3. Przekrój gwiazdy i kuli S(r).

masę tę możemy określić poprzez całkę objętościową daną jako:

$$M(r,t) = \int_{S(r)} \rho(r,t)\,dV. \tag{18}$$

Ponieważ we wstępnych założeniach przyjęliśmy symetryczność gwiazdy, dlatego też różniczkę dV można wyrazić za pomocą różniczki dr, wówczas mamy, że:

$$dV = 4\pi r^2 dr. \tag{19}$$

Podstawiając równanie (19) do zależności (18) otrzymujemy, że:

$$M(r,t) = \int_0^r 4\pi\rho(r,t)\,r^2 dr. \tag{20}$$

Różniczkując równanie (20) otrzymujemy relację pomiędzy M(r, t) oraz ρ(r, t).

$$\frac{\partial M(r,t)}{\partial r} = 4\pi\rho(r,t)\,r^2. \tag{21}$$

Postępując w analogiczny sposób jak w przypadku równowagi hydrostatycznej we wnętrzu gwiazdy równanie (21) w formie różniczkowej wynosi:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)\,r^2. \tag{22}$$

Zauważmy, że w równaniu (22) wykorzystaliśmy stacjonarność gwiazdy tzn., że zarówno masa M jak i gęstość ρ gwiazdy nie zależą od czasu. Ponadto równania (9a) i równoważne jemu równanie (9b) wraz z równaniem (22) stanowią pierwsze dwa równania związane z budową wewnętrzną gwiazdy.

Strumień energii przepływający przez gwiazdę

Rozważmy ponownie warstwę kulistą, która znajduje się w odległości r od środka rozważanej gwiazdy. Niech L(r) oznacza ilość energii opuszczającej w ciągu 1 sekundy kulę o powierzchni S(r). Energia L(r) musi być równa ilości energii wyprodukowanej w ciągu 1s w wyniku zachodzą-

eprasa.pl 0593885dee

cych we wnętrzu gwiazdy reakcji termojądrowych. Ponadto energia ΔL(r) zależy od wydajności ε danego cyklu reakcji termojądrowych, jaka zachodzi w tej warstwie w jednostce masy oraz od całkowitej masy materii, która zawarta jest w warstwie o grubości Δr, promieniu r i gęstości ρ. Wówczas możemy zapisać:

$$L(r)=\int_{S(r)}\rho(r)\varepsilon\,dV=4\pi\int_0^r\rho\,r^2\,\varepsilon\,dr=\frac{4}{3}\pi\rho\varepsilon\,r^3. \qquad (23)$$

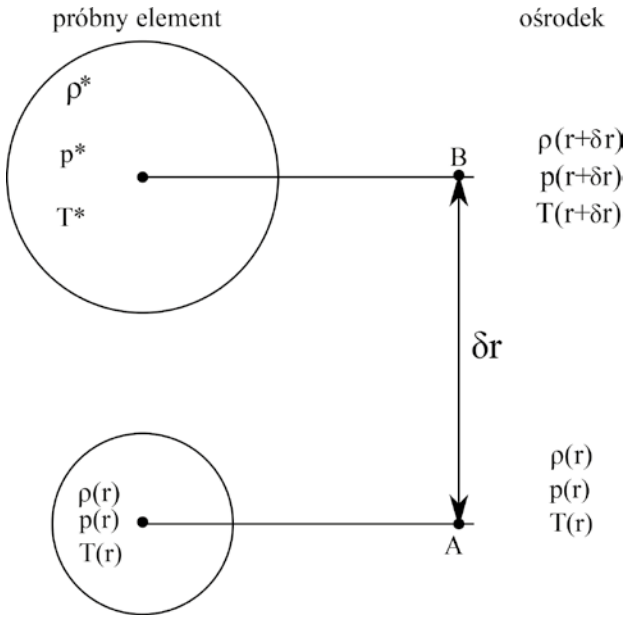
Zauważmy, że w równaniu (23) czynnik $4\pi r^2dr$ oznacza objętość warstwy kulistej. Różniczkując równanie (23) możemy zapisać, że:

$$\frac{dL(r)}{dr}=4\pi\,r^2\,\varepsilon\rho(r). \qquad (24)$$

Równanie (24) stanowią kolejną zależność związaną z opisem struktury wewnętrznej gwiazdy.

Transport energii w gwieździe

W strefie równowagi konwektywnej energia we wnętrzu gwiazdy jest transportowana przez konwekcję (unoszenie) a także promieniowanie. Bąble gorącego gazu unoszą się do powierzchni gwiazdy niosąc ze energię wytworzoną w jej wnętrzu. Aby energia mogła być transportowana przez konwekcje to we wnętrzu gwiazdy muszą utrzymywać się pionowe ruchy materii. W tym celu rozważamy następującą sytuację. Niech pewien element masy, który znajduje się w warstwie A w odległości r od centrum (środka) gwiazdy został uniesiony ku górze o bardzo mały odcinek δr do warstwy B zgodnie z rysunkiem (rys.4). Element ten zachowując ciepło w nim obecne rozpręża się ponieważ w ośrodku osaczającym go (warstwa B) występuje niższe ciśnienie. Ponieważ element nasz ulega adiabatycznemu rozprężeniu poszukujemy warunku, aby energia przenoszona była wraz z materią. Jeżeli gęstość rozważanego elementu jest



Rys. 4. Schemat warunku na istnienie konwekcji.

mniejsza niż gęstość otaczającego go ośrodka to na podstawie prawa Archimedesa element będzie unosił się do góry samorzutnie. W przeciwnym razie, jeżeli jego gęstość będzie większa niż gęstość otaczającego go ośrodka opadanie do początkowego położenia.

Aby mogła zajść konwekcja we wnętrzu gwiazdy musi być spełniona zależność, że:

$$\rho^*<\rho(r+\delta r). \qquad (25)$$

Równanie (25) pociąga za sobą spełnienie następujących dwóch zależności odpowiednio dla ciśnienia (równość ciśnień) i temperatury, co można wyrazić jako następujący układ:

$$p^*=p(r+\delta r), \qquad (26a)$$

$$T^*>T(r+\delta r)=T(r)+\frac{dT(r)}{dr}\delta r. \qquad (26b)$$

W następnym kroku wykorzystajmy równanie (26b):

$$T^*>T(r)+\frac{dT(r)}{dr}\delta r. \qquad (27)$$

Podzielmy obustronnie równanie (27) przez T(r), wówczas otrzymamy, że:

$$\frac{T^*}{T(r)}>1+\frac{\frac{dT(r)}{dr}\delta r}{T(r)}=1+\frac{d\ln T(r)}{dr}\delta r. \qquad (28)$$

Zauważmy, że lewą stronę nierówności (28) można obliczyć analizując zmiany temperatury w rozważanym elemencie. W przypadku przemiany adiabatycznej słuszna jest następująca zależność:

$$\frac{T^*}{T(r)}=\left(\frac{p^*}{p(r)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \qquad (29)$$

gdzie γ oznacza stosunek dwóch rodzajów ciepła właściwego: $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$, c_p oznacza ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, a c_v oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości. Wykorzystując równanie (26a) możemy równanie (29) wyrazić jako:

$$\frac{T^*}{T(r)}=\left(\frac{p(r+\delta r)}{p(r)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(\frac{p(r)+\frac{d\,p(r)}{dr}\delta r}{p(r)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$=\left(1+\frac{d\ln p(r)}{dr}\delta r\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\approx\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{d\ln p(r)}{dr}\delta r\right). \qquad (30)$$

Porównajmy teraz prawą stronę równania (28) z prawą stroną równania (30) wówczas otrzymamy, że:

eprasa.pl 0593885dee

$$1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{d\ln p(r)}{dr}\delta r > 1+\frac{d\ln T(r)}{dr}\delta r. \tag{31}$$

Analiza numeryczna równań wewnętrznej struktury gwiazdy prowadzi do wniosku, że gdyby spełniona była nierówność prosta to ruchy konwektywne wewnątrz gwiazdy byłyby bardzo gwałtowne i nastąpiłoby szybkie wyrównanie temperatur w danej warstwie. Zatem nierówność (31) należy w dalszej części rozpatrywać jako równość. Przekształćmy teraz nierówność daną zależnością (31) w taki sposób, aby obliczyć wartość wyrażenia $\frac{d\ln T(r)}{dr}$. W tym celu wyraz wolny, czyli liczbę 1 odejmujemy stronami i po redukcji mamy:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{d\ln p(r)}{dr}\delta r = \frac{d\ln T(r)}{dr}\delta r. \tag{32}$$

Podzielmy jeszcze obustronnie równanie (32) przez δr:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{d\ln p(r)}{dr} = \frac{d\ln T(r)}{dr}. \tag{33}$$

Czynnik $\frac{d\ln T(r)}{dr} < 0$ ponieważ wraz z oddalaniem się od centrum gwiazdy temperatura maleje, natomiast $\frac{\gamma-1}{\gamma} > 0$, więc równanie (33) po prostych przekształceniach upraszcza się do następującej postaci:

$$\frac{d\ln p(r)}{d\ln T(r)} = \frac{\gamma}{\gamma-1}. \tag{34}$$

We wnętrzu Słońca znajdują się niemalże pojedyncze atomy, stosunek dwóch rodzajów ciepła właściwego $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$, więc warunek na istnienie we wnętrzu Słońca ruchów konwektywnych dany jest jako:

$$\frac{d\ln p(r)}{d\ln T(r)} > \frac{5}{2}. \tag{35}$$

Wykorzystując równanie (34) oraz wcześniejsze nasze rozważania możemy zapisać, że:

$$\frac{\frac{1}{p(r)}\frac{dp(r)}{dr}}{\frac{1}{T(r)}\frac{dT(r)}{dr}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}, \tag{36}$$

co jest równoważne następującej zależności:

$$\frac{\frac{dp(r)\,T(r)}{dr}}{\frac{dT(r)\,p(r)}{dr}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}. \tag{37}$$

Po dalszych przekształceniach mamy:

$$\frac{dT(r)\,p(r)}{dr}\gamma = \frac{dp(r)\,T(r)}{dr}(\gamma-1). \tag{38}$$

Podzielmy teraz równanie (38) obustronnie przez następujący iloczyn: $p(r)\gamma$, wówczas otrzymamy:

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{dp(r)}{dr}\frac{T(r)}{p(r)}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right). \tag{39}$$

Do otrzymanego równania (39) podstawmy po prawej stronie równanie (9a) czyli równanie równowagi hydrostatycznej, wówczas otrzymamy, że:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r)\frac{T(r)}{p(r)}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right). \tag{40}$$

Aby uprościć równanie (40) wykorzystajmy jeszcze równanie stanu gazu doskonałego w postaci:

$$p(r) = \frac{R_g}{\mu}\rho(r)\,T(r), \tag{41}$$

wówczas po prostych przekształceniach mamy:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\frac{\mu}{R_g}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right), \tag{42}$$

eprasa.pl 0593885dee

gdzie R_g oznacza uniwersalną stałą gazową, a μ jest średnią masą cząsteczkową.

Aby wyprowadzić ostatnie równanie dotyczące struktury wewnętrznej gwiazdy należy zauważyć, że obowiązuje ono w warstwach położonych w strefie promienistej. W tym celu musimy rozważyć interakcję (oddziaływanie) zachodzącą pomiędzy strumieniem promieniowania a materią gwiazdową, która tworzy tę warstwę. Zasadniczo możemy wyróżnić trzy procesy, które są odpowiedzialne za absorbcję promieniowania zachodzącą wewnątrz gwiazd. Pierwszym z nich jest wywołana przez promieniowanie dalsza jonizacja jonów ośrodka. Drugi to absorbcja promieniowania w czasie tzw. swobodno-swobodnych przejść elektronów. Natomiast trzeci proces to rozproszenie na swobodnych elektronach w wyniku, którego zmianie ulega kierunek fotonów padającego promieniowania.

Niech p(r) oznacza ciśnienie promieniowania. Następnie wykorzystajmy równanie równowagi hydrostatycznej (równanie (9b)), które możemy wyrazić w następującej formie:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -g^*(r)\rho(r). \tag{43}$$

W równaniu (43) parametr g*(r) oznacza przyspieszenie gazu, które wywołane jest przez absorbcję promieniowania. Przez powierzchnię kuli S(r) w ciągu czasu równego t=1s przepływa energia, która jest równa L(r). Zatem przez każdą jednostkową powierzchnię o wymiarach 1cm² w ciągu t=1s przepływa energia: $\frac{L(r)}{4\pi r^2}$. Wówczas w ciągu t=1s każdy gram materii pochłania energię równą:

$$E = \chi \frac{L(r)}{4\pi r^2}. \tag{44}$$

Ponieważ pęd promieniowania elektromagnetycznego o energii E równa się E/c, gdzie c jest prędkością światła, więc pęd, który w ciągu sekundy przekazuje promieniowanie każdemu gramowi materii, czyli przyspieszenie dany jest jako:

$$g^*(r) = \chi \frac{L(r)}{4\pi r^2 c}. \tag{45}$$

Przyjmijmy, dla uproszczenia, że rozkład widmowy promieniowania zachodzącego wewnątrz gwiazdy jest taki sam jak rozkład promieniowania ciała doskonale czarnego. Wówczas ciśnienie promieniowania jest jednoznacznie określone przez temperaturę gazu, co można wyrazić jako:

$$p_r(r) = \frac{1}{3} a T^4(r). \tag{46}$$

Podstawiając teraz równania (46) i (45) do zależności (43) trzymamy, że:

$$\frac{d\left(\frac{1}{3} a T^4(r)\right)}{dr} = -\chi \frac{L(r)}{4\pi r^2 c}\rho(r). \tag{47}$$

W ostatnim kroku po zróżniczkowaniu lewej strony równania (47) otrzymamy:

$$\frac{4}{3} a T^3(r) \frac{dT}{dr} = -\chi \frac{L(r)}{4\pi r^2 c}\rho(r). \tag{48}$$

Wówczas po prostych przekształceniach otrzymamy, że:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi L(r)\rho(r)}{16\pi a c r^2 T^3(r)}. \tag{49}$$

W równaniu (49) poszczególne symbole oznaczają: χ jest współczynnikiem absorbcji oraz a jest stałą która wiąże ciśnienie gazu fotonowego (ciśnienie promieniowania) z temperaturą. Zauważmy, że wyprowadzone równania (42) oraz (49) należy używać zamiennie w zależności od tego czy transport energii we wnętrzu rozważanej gwiazdy zachodzi przez konwekcję czy promieniowanie.

Podsumowanie

Analizując przestawione w tym artykule zależności matematyczne dotyczące opisu struktury wewnętrznej gwiazdy można skonstruować następujące zestawienie:

Lp.	Zależność matematyczna	Numer równania	Nazwa równania
1.	$\frac{dp}{dr} = -G\frac{M(r)}{R^2}\rho(r)$	9a	Warunek równowagi hydrostatycznej
2.	$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r) r^2$	22	Warunek ciągłości masy
3.	$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon\rho(r)$	24	Warunek na tempo produkcji energii
4a.	$\frac{dT(r)}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r)\frac{T(r)}{p(r)}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$	42	Transport energii (konwekcja)
4b.	$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi L(r)\rho(r)}{16\pi a c r^2 T^3(r)}$	49	Transport energii (promieniowanie)

Literatura:

[1] Kreiner J. M., Astronomia z astrofizyką, Wydawnictwo Naukowe PWN 1988.
[2] Kubiak M., Gwiazdy i materia międzygwiazdowa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
[3] Rybka E., Astronomia ogólna, Wydawnictwo Naukowe PWN 1970.
[4] Stodółkiewicz J., Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki, Wydawnictwo Naukowe PWN 1978.
[5] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. I, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 1, str. 44-50.
[6] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. II, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 2, str. 46-50.
[7] Wesołowski M., Wybrane zagadnienia z mechaniki nieba cz. III, 2023, Fizyka w Szkole z Astronomią, nr 3, str. 43-50.

eprasa.pl 0593885dee

Fizyczna ewolucja gwiazd

Marcin Wesołowski

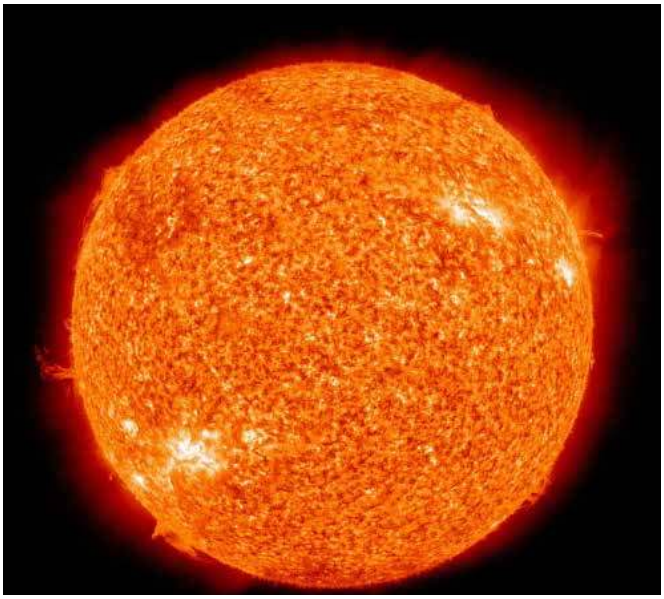


Foto. 1. Słońce w dalekim ultrafiolecie, widoczna granulacja powierzchni. Foto. NASA.

Gwiazda jest samoświecącym obiektem astronomicznym, który przez znaczną cześć swojego życia wypromieniowuje energie powstałą w wyniku reakcji jądrowych zachodzących w jego wnętrzu. Głównym procesem odpowiedzialnym za powstawanie energii w postaci światła jest spalanie wodoru do helu i innych cięższych pierwiastków. Najbliższa gwiazda względem Ziemi to Słońce, które jest odległe od niej o około 150 mln km, druga z kolei to α Centauri odległa o 4,3 lat świetlnych znajdująca się w gwiazdozbiorze Centaura.

Okiem nieuzbrojonym możemy zaobserwować około 6000 gwiazd na obu półkulach ziemskich ze znanych około 20 milionów gwiazd, które należą do naszej galaktyki. Szacuję się, bowiem, że całkowita liczba wszystkich gwiazd w Galaktyce Drogi Mlecznej wynosi około $2{\cdot}10^{11}$. Masy gwiazd przybierają wartości od około 0.08 M_S do rzędu 100 M_S, (M_S jest masą Słońca), promienie od około 10 km (gwiazdy neutronowe) do rzędu 1000 R_S, temperatury powierzchni od rzędu tysiąca do kilkudziesięciu tysięcy Kelvinów.

Ze względu na jasność absolutną gwiazdy podzielono na następujące klasy: I – nadolbrzymy, II – jasne olbrzymy, III – olbrzymy, IV – podolbrzymy, V – karły (gwiazdy ciągu głównego), VI – podkarły, VII – białe karły. Dla gwiazd o szczególnie dużej jasności absolutnej tzw. hiperolbrzymów wprowadzono dodatkowo klasę jasności „0”. Ze względu na intensywność występujących w widmie promieniowania elektromagnetycznego linii i pasm absorpcyjnych gwiazdy dzielimy na następujące typy widmowe (zgodnie ze zmniejszaniem się temperatury fotosfery gwiazdy): O, B, A, F, G, K, M.

Oprócz wyszczególnionych powyżej podstawowych typów widmowych gwiazd istnieje nieliczna grupa gwiazd o widmach zbliżonych do typów G lub K mających silne linie i pasma węgla. Typy te oznaczono literami R i N. Są to tzw. gwiazdy węglowe. Gwiazdom posiadającym w widmie pasma tlenku cyrkonu przypisano typ S – są to gwiazdy cyrkonowe. W każdym z typów wyróżnia się dodatkowo dziesięć podtypów oznaczonych cyframi 0, 1, 2, 3,... 9. Np. gwiazda oznaczona, jako G5 jest gwiazdą o widmie pośrednim, pomiędzy typem F i K. Obecnie stosowany jest powszechnie system MK dwuwymiarowej klasyfikacji widm gwiazdowych (Morgana i Keenana), w którym każdej gwieździe przypisuje się typ widmowy i klasę jasności.

Typ widmowy gwiazdy zależy od jej efektywnej temperatury, czyli temperatury, jaką idealne ciało czarne o takiej samej powierzchni jak gwiazda musiałoby mieć, aby wytworzyć taką samą całkowitą energię. Temperaturę efektywną

Foto. 2. Alpha Centauri. Foto. NASA..

Foto. 3. Jedna z najjaśniejszych gwiazd – Syriusz. Foto. NASA, ESA.

Foto. 4. Wega – jasna gwiazda nieba nocnego. Foto. NASA..

eprasa.pl 0593885dee

możemy obliczyć na postawie prawa Stefana – Boltzmanna. Dla przykładu obliczmy teraz temperaturę efektywną dla Słońca korzystają z następujące zależności:

$$T_{ef} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi\sigma R_S^2}}, \qquad (1)$$

gdzie L jest mocą wypromieniowaną przez Słońce ($L = 3.86 \cdot 10^{26}$ W), σ jest stałą Stefana-Boltzmanna ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$), R_S jest promieniem równikowym tarczy Słońca ($R_S = 696342 \cdot 10^3$ m). Wówczas temperatura efektywna dla naszej dziennej gwiazdy wynosi T_{ef} = 5781.46 K. Dodatkowo zauważmy że moc wypromieniowaną przez Słońce możemy powiązać że stała słoneczną za pomocą następującej zależności:

$$L = 4\pi d^2 S, \qquad (2)$$

gdzie d jest odległością Ziemi od Słońca ($d = 150 \cdot 10^9$ m), S jest stałą słoneczną czyli ilością energii słonecznej docierającej w jednostce czasu do jednostki powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się promieniowania na górnej granicy atmosfery ($S = 1361$ $W \cdot m^{-2}$). Wartość stałej słonecznej została wyznaczona na pomiarów wykonanych przez SORCE (ang. Solar Radiation and Climate Experiment). Ponadto słała słoneczna charakteryzuje się zmiennością w czasie. Rozkład ten został przedstawiony na rys.1.

Wykorzystując równania (1-2) można zauważyć, że temperatura efektywna dla Słońca dana jest jako:

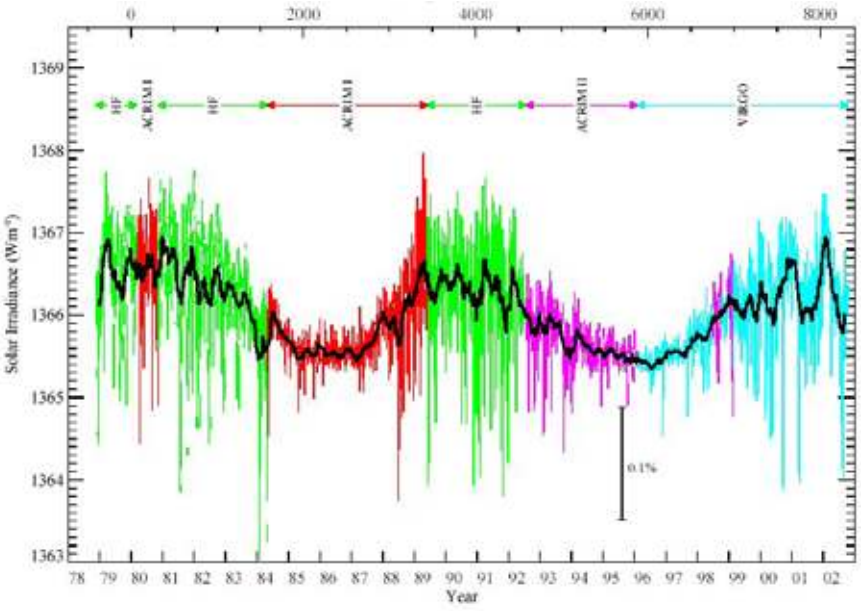
$$T_{ef} = \sqrt[4]{\frac{4\pi d^2 S}{4\pi\sigma R_S^2}} = \sqrt[4]{\frac{d^2 S}{\sigma R_S^2}} = 5777.01\,K \qquad (3)$$

W klasyfikacji MK Słonce jest określane jako gwiazda typu widmowego G2 V. Czerwony olbrzym Aldebaran w gwiazdozbiorze Byka ma efektywną temperaturę około 3910 Kelwinów i jest klasyfikowany jako gwiazda K5, podczas gdy Alcyone, najjaśniejsza z niebieskich olbrzymów w gromadzie otwartej Plejady, ma efektywną temperaturę około 12700 kelwinów i jest klasyfikowana jako gwiazda B7.

Foto. 5. Galaktyka Drogi Mlecznej w podczerwieni – zdjęcie wykonane przez Kosmiczny Teleskop Spitzera. Widoczna ogromna liczba gwiazd w Galaktyce. Foto. NASA.

Kolory i efektywne zakresy temperatur są następujące:

- powyżej 30 000 Kelwinów – opis koloru: niebieski
- B – 10 000 do 30 000 Kelwinów – opis koloru: niebiesko-biały
- A – 7500 do 10 000 Kelwinów – opis koloru: biały
- F – 6000 do 7500 Kelwinów – opis koloru: żółto-biały
- G – 5200 do 6000 Kelwinów – opis koloru: żółty
- K – 3700 do 5200 Kelwinów – opis koloru: pomarańczowy
- M – 2400 do 3700 Kelwinów – opis koloru: czerwony.



Rys.1. Zmienność stałej słonecznej (Rys. NASA).

Foto. 6. Pulsar w Mgławicy Kraba. Foto. NASA, ESA.

eprasa.pl 0593885dee

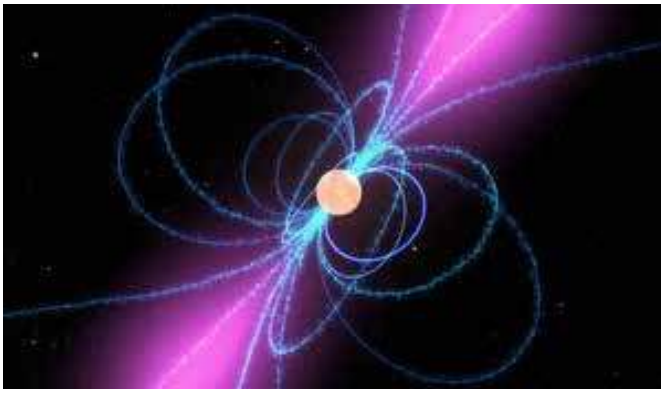


Foto. 7. Graficzny model pulsara. Foto. NASA.

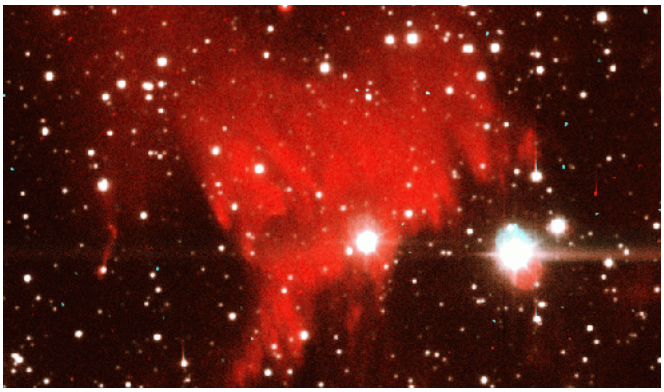


Foto. 8. Gwiazda Nova Cygni 1992. Foto. NASA. M_s

Aby móc dowiedzieć się nieco więcej o poszczególnych rodzajach gwiazd dokonamy teraz klasycznego ich podziału. Możemy wyróżnić następujące typy gwiazd.

Gwiazda neutronowa jest jednym z możliwych ostatnich etapów ewolucji gwiazd. Obiekt powstały po wybuchu supernowej o bardzo niewielkich rozmiarach rzędu 10 km i olbrzymiej gęstości około 10^{17} [kg·m^{-3}], zbudowany jest głównie z neutronów. Szybko rotująca gwiazda neutronowa obdarzona znacznym polem magnetycznym może być pulsarem – źródłem silnego promieniowania elektromagnetycznego o pulsującym w czasie natężeniu.

Gwiazda Nova – gwiazda zmienna, która nagle w ciągu kilku dni powiększa wybuchowo swą jasność o kilkanaście wielkości gwiazdowych. Następnie jasność gwiazdy powoli w ciągu kilku lat maleje, by w końcu osiągnąć poziom sprzed wybuchu, przy czym mogą występować dalsze wahania jasności.

Analiza jasności prowadzi do wniosku, że przyczyną wybuchu jest niestabilność, prowadząca do odrzucenia warstw zewnętrznych gwiazdy. Wzrost jasności, początkowo związany jest z gwałtownym wzrostem promienia gwiazdy, a więc że zwiększeniem powierzchni emitującej promieniowanie, a następnie duża jasność gwiazdy pochodzi od promieniowania jej gorętszych teraz odsłoniętych głębszych warstw.

Obecnie uważa się, że zdecydowana większość (lub nawet wszystkie) Gwiazdy Nove to składniki układów podwójnych a wybuchy są konsekwencją procesów związanych z przepływem materii z jednej gwiazdy do drugiej. Termin ”gwiazda nova” może być mylący, gdyż nie oznacza on oczywiście gwiazdy nowo powstałej, lecz taką, która świeciła relatywnie słabo, lecz nagle gwałtownie pojaśniała.

Gwiazda Supernowa, (supernowa) – gwiazda ulęgająca zjawisku fizycznego wybuchu, który prowadzi do jej rozpadu i któremu towarzyszy olbrzymi wzrost blasku nawet o 20 magnitudo. Zjawisko to ma miejsce w bardzo późnym etapie ewolucji gwiazdy. W maksimum blasku gwiazdy supernowe promieniują z mocą porównywalną do mocy promieniowania całych galaktyk, przez co mogą być wykrywane nawet w bardzo dużych odległościach od Ziemi.

Ze względu na cechy obserwacyjne supernowe dzielimy obecnie na trzy grupy Ia (SNIa), Ib (SNIb) i II (SNII). Podział ten jest pozostałością pierwotnego podziału na dwie grupy. Supernowe typu Ia osiągają maksymalną jasność w czasie około dwóch tygodni od wybuchu a następnie w podobnym okresie czasu obniżają swój blask o około $3^m,5$. Dalszy spadek jasności jest już znacznie wolniejszy. Jasność w maksimum blasku wykazuje bardzo małą dyspersję i dlatego są one najlepszymi „świecami standardowymi”, służącymi do wyznaczania odległości we Wszechświecie.

Charakterystyczna cechą widm tego rodzaju supernowych jest całkowity brak linii wodoru. Występują one w galaktykach eliptycznych i w dyskach galaktyk spiralnych, ale nie

Foto. 9. Mgławica Kraba – pozostałość po supernowej SN 1054. Foto. NASA.

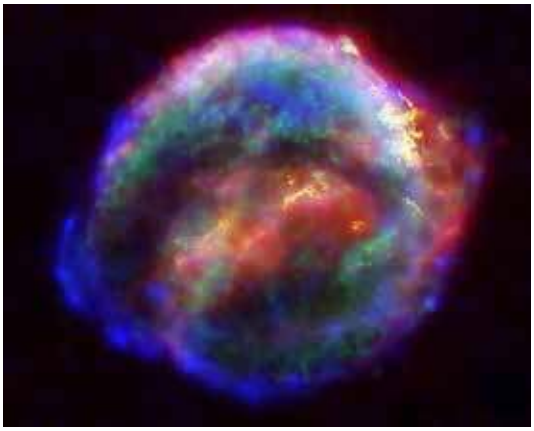


Foto. 10. Pozostałość po gwieździe Keplera – SN 1604. Foto. NASA.

Foto. 11. Gwiazda zmienna V838 Mon. Foto. NASA, ESA.

eprasa.pl 0593885dee

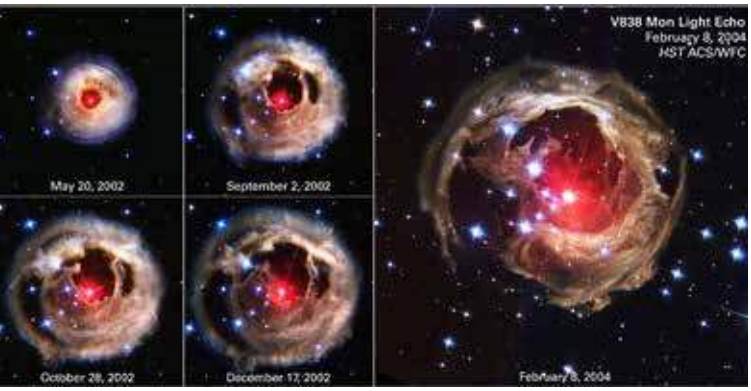


Foto. 12. Ekspansja świetlnego echa V838 Monocerotis do 2004 roku. Foto. NASA, ESA.

Foto.13. Dalsza ekspansja Gwiazdy V838 w latach 2005 – 2006. Foto. NASA, ESA.

są obserwowane w ich ramionach. Powszechnie uważa się, że przyczyną wybuchu supernowych (Ia) jest niestabilność białego karła pojawiająca się w momencie, gdy przekroczy on masę krytyczna 1.44 M_S (masę Chandrasekhara). Może się to zdarzyć np. w układzie podwójnym.

Gwiazdy supernowe (Ib) są znacznie rzadziej obserwowane. Ich krzywa blasku jest podobna do supernowych Ia, lecz wykazuje nieco wolniejszy spadek jasności, szczególnie w pobliżu maksimum. Widma supernowych Ib są podobne do widma supernowych Ia. Wykazują jednak pewne cechy w okolicach maksimum blasku, które w widmach supernowych Ia ujawniają się później, dopiero kilkadziesiąt dni po maksimum. Stwierdza się również w ich widmach brak linii wodorowych. Prawdopodobnie poprzednikami supernowych Ib są gwiazdy Wolfa-Rayeta.

Supernowe Ib nigdy nie występują w galaktykach eliptycznych. Dowodzi to, że pomimo pewnych podobieństw są to obiekty różne od supernowych typu Ia. Za przyczynę wybuchu uważa się nagłą implozję jądra nadolbrzyma o masie większej niż 15 M_S. Supernowe II zmieniają po wybuchu swoją jasność w sposób zdecydowanie inny niż dwie poprzednie grupy supernowych. Przede wszystkim zmiany blasku są wolniejsze i wykazują większą niejednorodność.

Kilkadziesiąt dni po maksimum spadek jasności jest zatrzymany na pewien czas – pojawia się jego wyraźne plateau – następnie jasność maleje w przybliżeniu liniowo. Widma supernowych II zawierają linie emisyjne wodoru oraz absorpcyjne linie helu, azotu, sodu magnezu, żelaza. Supernowe II występują w ramionach spiralnych galaktyk. Uważa się, że przyczyna wybuchu supernowej II jest przekształcenie się rdzenia masywnej gwiazdy w neutrony i towarzyszące temu powstanie fali uderzeniowej, która rozrywa gwiazdę.

Gwiazda zmienna to gwiazda o zmieniającej się jasności. Zasadniczo rozróżniamy dwa typy gwiazd zmiennych: gwiazdy zmienne fizycznie oraz gwiazdy zmienne zaćmieniowe. W pierwszym typie zmiany jasności są wynikiem zachodzących procesów fizycznych, w drugim typie zmiany jasności są wynikiem wzajemnego zakrywania się dwóch składników układu podwójnego.

Gwiazda V838 jest jedną z ciekawszych gwiazd znajdujących się na obrzeżach naszej Galaktyki – Galaktyki Drogi Mlecznej. Szczegóły związane z naturą i ewolucją tej gwiazdy do końca nie są jeszcze zrozumiałe, choć uważa się, że opuściła ona ciąg główny stając się nadolbrzymem.

Gwiazdy fizycznie podwójne to układ dwóch gwiazd związanych siłami wzajemnej grawitacji krążących wokół wspólnego środka masy po orbitach eliptycznych. Rozróżniamy gwiazdy wizualnie, spektroskopowo i zaćmieniowo podwójne.

Gwiazdy magnetyczne – gwiazdy głównie typu A, w których istnieją stosunkowo silne pola magnetyczne. Natężenie pola magnetycznego większości gwiazd magnetycznych ulega zmianom nieregularnym lub periodycznym.

Foto. 14. Gwiazda podwójna T Pyxidis – znajdująca się w gwiazdozbiorze Kompasu (łac. Pyxis). Foto. NASA, ESA.

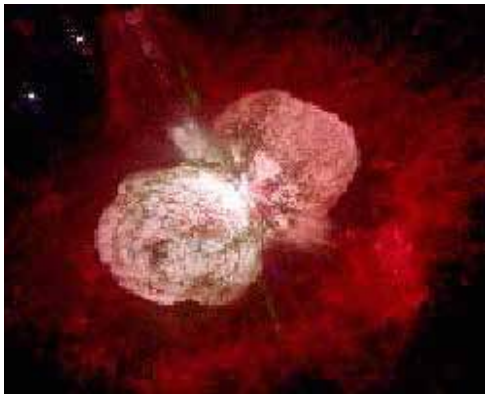


Foto. 15. Eta Carinare – należy do najbardziej magnetycznych gwiazd w kosmosie. Foto. NASA.

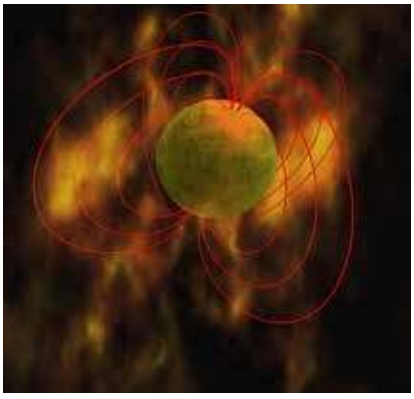


Foto. 16. Magnetar wraz z liniami pola magnetycznego (wizja artystyczna). Foto. NASA.

eprasa.pl 0593885dee

Foto. 17. Gwiazda CH Cygni (symbiotyczna) znajdująca się w gwiazdozbiorze Łabędzia. Foto. NASA.

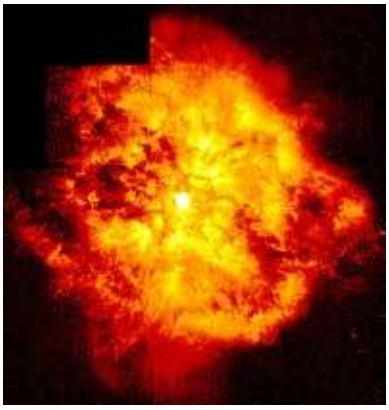


Foto. 18. Mgławica M1 – 67 wokół Wolfa-Rayeta WR 124. Fotografia wykonana przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a. Foto. NASA, ESA.

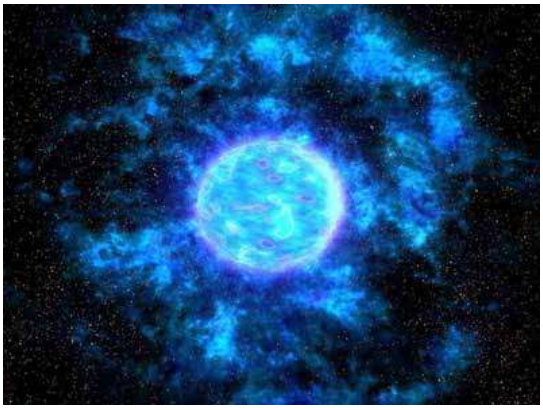


Foto. 19. Ostanie chwile przed potężną eksplozją (błyskiem gama) gwiazdy typu Wolfa-Rayeta. Foto. NASA.

Okres zmienności pola magnetycznego jest rzędu od kilku do kilkudziesięciu dni. Zmianom tym towarzysza niewielkie zmiany jasności i natężeń linii widmowych. Periodyczność zmian pola magnetycznego dobrze tłumaczy model "skośnego rotatora". Zakłada on, że oś magnetyczna gwiazdy jest nachylona pod pewnym kątem do osi rotacji gwiazdy, co sprawia, że obserwujemy zmiany pola magnetycznego gwiazdy zgodne z okresem jej rotacji. Najlepiej poznana gwiazda magnetyczna o okresie zmian równym 5, 469 doby to gwiazda α^2 *CanumV enaticorum*.

Gwiazdy metaliczne, Am – gwiazdy ciągu głównego o temperaturze efektywnej od 7400 K do 10 200 K, które mają silne linie pierwiastków metalicznych (Fe, Ti, V, Cr, Mn, Co, Ni, Cu, Zn, Sr) przy jednoczesnym osłabieniu w widmie linii Ca, Mg i Sc. Dwie charakterystyczne cechy gwiazd metalicznych to: 1) bardzo wolno rotują, 2) zdecydowana większość a być może wszystkie są składnikami układów podwójnych.

Gwiazdy optycznie podwójne to układ dwóch gwiazd niezwiązanych ze sobą grawitacyjnie, znajdujących się w zupełnie różnych odległościach od Słońca, które jednak na sferze niebieskiej położone są bardzo blisko siebie sprawiając wrażenie, że są ze sobą związane.

Gwiazdy symbiotyczne to układ podwójny gwiazd, z których jedna jest chłodnym nadolbrzymem lub olbrzymem typu G, K, lub M a druga jest gwiazda ciągu głównego o znacznie wyższej temperaturze efektywnej lub jest białym karłem. Wybuchy jasności o około 2 magnitudo związane są z przepływem materii z gwiazdy chłodniejszej do cieplejszej. Przykłady gwiazd symbiotycznych: *Z Andromedae, CH Cygni, AG Draconis*.

Gwiazdy typu Wolfa-Rayeta to bardzo jasne gwiazdy (jasność absolutna może być rzędu nawet 9 magnitudo) o wysokiej temperaturze powierzchni, równej kilkadziesiąt tysięcy Kelvinów. Ich widma charakteryzują się silnymi szerokimi liniami emisyjnymi helu, węgla i azotu oraz niewielkim natężeniu lub brakiem linii wodoru. Taka charakterystyka widma może być wytłumaczona istnieniem bardzo dużej rozrzedzonej otoczki ekspandującej z dużą prędkością. Dawniej gwiazdy Wolfa- Rayeta zaliczano do typu widmowego O. Aktualnie wyodrębniono dla nich oddzielny typ W, który podzielono na podgrupy WC, WN i WO w zależności od tego czy intensywniej występują linie węgla, azotu czy tlenu.

Gwiazdy wielokrotne to układ co najmniej 3 gwiazd (i nie więcej niż 10) związanych ze sobą grawitacyjnie i krążących wokół wspólnego środka masy.

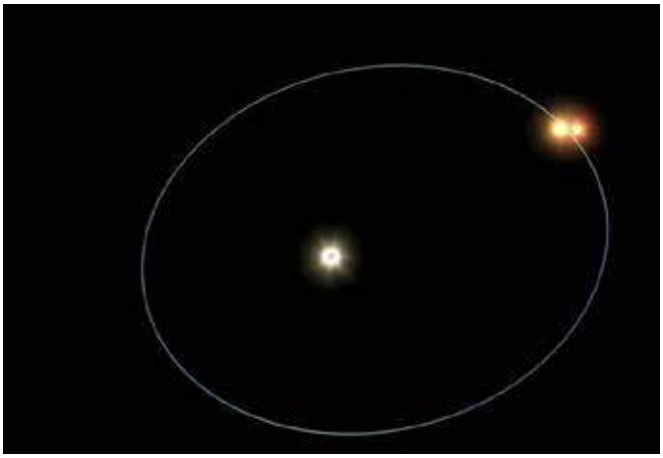


Foto. 20. Artystyczna wizja orbity HD 188753, gwiazda systemu potrójnego. Foto. NASA.

Foto. 21. Potrójny zachód słońca na HD 188753 Ab – wizja artystyczna. Foto. NASA.

eprasa.pl 0593885dee

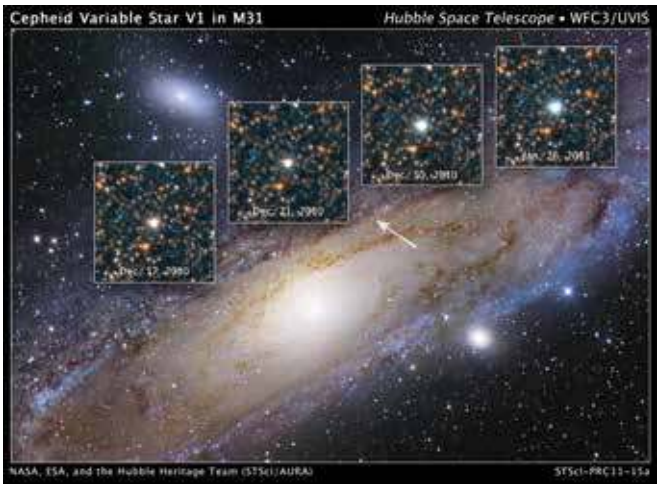


Foto. 22. Gwiazda zmienna typu cefeid znajdująca się w galaktyce Andromedy (M31). Foto. NASA.

Foto. 23. Gwiazda zmienna T Tauri – od jej nazwy pochodzi cała klasa gwiazd zmiennych typu T Tauri. Foto. NASA.

Gwiazdy zmienne typu δ Cephei (cefeidy) – cefeidy długookresowe o okresie zmienności od 1 do 70 dni (u większości okres wynosi około 7 dni). Amplituda zmian jasności zawiera się w przedziale od 0.1 do 2.0 magnitudo. Są to nadolbrzymy typu F-G. W grupie cefeid wyróżnia się również grupę typu *W V irginis* o mniejszej mocy promieniowania.

Gwiazdy zmienne typu RR Lyrae to olbrzymy typu widmowego A – F o okresach zmienności od 0.05 do 1.2 doby. Amplituda zmian jasności tego typu gwiazd zawiera się w przedziale od 0.5 do 2.0 magnitudo.

Gwiazdy zmienne typu T Tauri to gwiazdy typu widmowego F – G wykazujące nieregularne zmiany jasności o amplitudzie rzędu nawet 3 magnitudo. W okresach pomiędzy wybuchami jasność gwiazdy może być przez dłuższy czas stała. Linie absorpcyjne wykazują przesuniecie w kierunku czerwieni a linie emisyjne w kierunku fioletu. Jest to spowodowane gwałtownymi ruchami materii w atmosferze gwiazdy. Chłodne warstwy opadają na gwiazdę a gorące są wyrzucane na zewnątrz. Prawdopodobnie gwiazdy typu T Tauri należą do gwiazd bardzo młodych o nieustalonej równowadze wewnętrznej.

Ewolucja gwiazd

Ewolucja gwiazd to ogół zmian fizyko – chemicznych, jakim ulęgają gwiazdy wraz z upływem czasu. Powszechnie uważa się, że gwiazdy powstają z materii międzygwiazdowej w wyniku kurczenia się wielkich obłoków molekularnych. Obłoki te zawierają głównie wodór, hel i pył. Kurczenie obłoku następuje wtedy, gdy oddziaływanie grawitacyjne pomiędzy jego cząsteczkami przezwycięża ciśnienie gazu. Aby tak się stało obłok musi spełnić tzw. kryterium Jeansa określające jego minimalna masę M_J, (masę Jeansa), przy której możliwy jest proces kontrakcji grawitacyjnej.

Swobodnie kurczący się obłok wypromieniowywuje coraz to więcej wyzwalanej energii grawitacyjnej i jego jasność rośnie, natomiast temperatura pozostaje stała. Pierwotny olbrzymi obłok kurcząc się zwiększa swoja gęstość. Ponieważ masa Jeansa jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z gęstości obłoku wiec w zapadającym się pierwotnym obłoku powstają lokalne skupienia spełniające kryterium Jeansa. Dochodzi do jego fragmentyzacji, czyli rozpadu na mniejsze obłoki – protogwiazdy, z których każda kurczy się oddzielnie zwiększając swoja gęstość i temperaturę. Gdy masa kurczącego się pojedynczego obłoku jest nie mniejsza niż 0.08 M_S temperatura centralna może osiągnąć wartość około 10 mln Kelvinów. Wtedy w jądrze protogwiazdy może rozpocząć się proces przemiany wodoru w hel, któremu towarzyszy wydzielanie się olbrzymich ilości energii.

Energia ta w większości jest wypromieniowana z powierzchni fotosfery, jako promieniowanie świetlne, a pewna jej cześć uwalniana jest jako energia neutrin. Zostaje osiągnięta równowaga hydrostatyczna tzn. ciśnienie grawitacyjne zostaje zrównoważone prze ciśnienie gazu, ustaje proces kontrakcji grawitacyjnej. W zależności od masy nowo powstałej gwiazdy zachodzi w niej synteza helu w cyklu proton-proton lub w cyklu węglowo – tlenowym (CNO). W ten sposób rodzi się gwiazda, która na wykresie H-R znajduje się na ciągu główny.

Ponieważ procesy nukleosyntezy zachodzą tylko w centralnych rejonach gwiazdy więc po pewnym czasie zaczyna wyczerpywać się paliwo wodorowe, głównym składnikiem gwiazdy staje się hel i tempo spalania wodoru słabnie. Gwiazda na tym etapie ewolucji zbudowana jest z helowego jądra spowitego wodorową atmosferą. Ciężar górnych warstw gwiazdy przestaje być równoważony przez ciśnienie promieniowania, gwiazda traci stabilność i jej jadro zaczyna się kurczyć. Powoduje to wzrost temperatury na tyle duży, że w cienkiej warstwie wokół jądra helowego powstają warunki do dalszej przemiany wodoru w hel, której tempo zaczyna wzrastać. W konsekwencji ciśnienie promieniowania przeważa nad ciężarem zewnętrznych warstw atmosfery i gwiazda zaczyna „puchnąć" – czyli zwiększać swoje wymiary, przekształcając się w czerwonego olbrzyma.

Na diagramie H-R odpowiada temu droga ewolucyjna, polegająca na odejściu w prawo od ciągu głównego do obszaru olbrzymów. Czas przebywania gwiazdy na ciągu głównym zależy od jej masy. Gwiazdy bardziej masywne ewoluują szybciej (szybciej się „starzeją"). Uważa się,

eprasa.pl 0593885dee

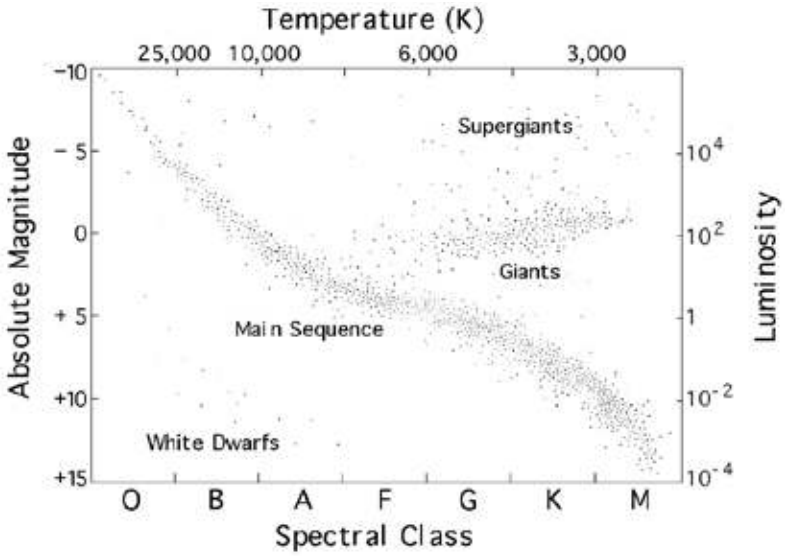


Foto. Diagram Hertzsprunga – Russella (H – R). Foto. NASA.

Foto. 25. Obszar gwiazdotwórczy LH 95 w Wielkim Obłoku Magellana. Foto. NASA, ESA.

że zasadniczo do stadium czerwonego olbrzyma ewolucja wszystkich gwiazd o masach większych niż około 0.4 M_S przebiega podobnie. Natomiast gwiazdy o masach mniejszych od tej granicznej wartości, po wyczerpaniu wodoru w jadrze osiągają szybko stadium białego karła.

Dalsza droga ewolucyjna zależy w zasadniczy sposób od masy gwiazdy. Dla gwiazd o masach zbliżonych do masy Słońca opisane powyżej kurczenie się helowego jądra może doprowadzić do warunków sprzyjających syntezie węgla z helu (proces 3 α – polega on na syntezie jądra węgla z trzech jąder helu). Ten etap ewolucji określany jest jako błysk węglowy. Gwiazda ma jednak zbyt mała masę, aby po wypaleniu się helu mogła przemieniać węgiel w pierwiastki cięższe.

Końcowy etap ewolucji takich gwiazd polega na stopniowym wygaszaniu przemian jądrowych, kurczeniu się jądra do momentu aż ciśnienie grawitacyjne zostanie powstrzymane przez ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego. Jednocześnie zaistniałe dynamiczne niestabilności powodują odrzucenie warstw zewnętrznych. Powstała w ten sposób mgławica planetarna otacza gwiazdę kończącą ewolucje, jako stygnący biały karzeł.

Gwiazdy bardziej masywne o masach większych niż 2,5M_S mogą przemieniać powstały węgiel sukcesywnie aż do żelaza i niklu. Zachodzą w nich kolejno reakcje syntezy neonu, tlenu, krzemu i w końcu żelaza i niklu. Na tych dwóch pierwiastkach kończy się nukleosynteza w gwiazdach, gdyż charakteryzują się one największą energią wiązania.

Dalsze przemiany jądrowe są endotermiczne i wymagałyby dostarczenia energii z zewnątrz. Powstający żelazowo-niklowy rdzeń gwiazdy pozostaje stabilny tak długo, jak długo ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego jest w stanie zrównoważyć ciśnienie grawitacyjne. Gdy rdzeń gwiazdy osiągnie pewną graniczną masę ($\approx 1.4M_S$), wtedy następuje gwałtowny rozpad jąder żelaza i niklu na jądra helu i neutrony. Towarzyszy temu gwałtowne, zmniejszenie się objętości rdzenia – jego implozja. Następnie powstaje fala uderzeniowa, która rozrywa gwiazdę. Zjawisko to obserwuje się, jako wybuch supernowej.

W trakcie wybuchu zachodzą reakcje jądrowe, których produktem są jądra ciężkich pierwiastków, które nie mogłyby być wyprodukowane we wnętrzach gwiazd. W wyniku wybuchu powstaje święcąca mgławica otaczającą odsłonięty rdzeń gwiazdy, który stanowi teraz gwiazdę neutronową. W przypadku bardzo masywnych gwiazd o masach większych niż 8M_S przypuszcza się, że ten ostatni etap przebiega podobnie, lecz powstała fala uderzeniowa nie jest w stanie odrzucić kolejnych warstw zewnętrznych gwiazdy, które opadają na rdzeń zwiększając jego masę. Ostatecznie ma miejsce kolaps rdzenia, który przekształca się w czarną dziurę.

dr hab. Marcin Wesołowski, prof. UR
Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych, Instytut Nauk Fizycznych,
Centrum Innowacji i Transferu Wiedzy Techniczno-Przyrodniczej Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Literatura

[1] M. Jaroszyński, 1993, Galaktyki i budowa Wszechświata, PWN, Warszawa
[2] M. Kubiak, 1994, Gwiazdy i materia międzygwiazdowa, PWN, Warszawa
[3] Urania – Postępy Astronomii, roczniki 1995-2012
[4] Strony internetowe:
http://www.nasa.gov
http://sci.esa.int

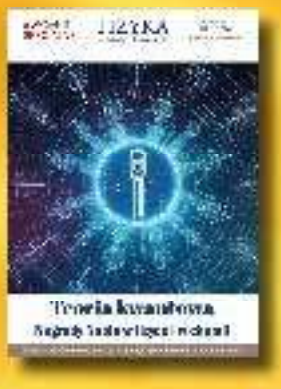
eprasa.pl 0593885dee

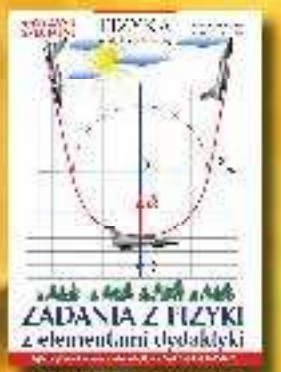
Cyfrowe wydania specjalne

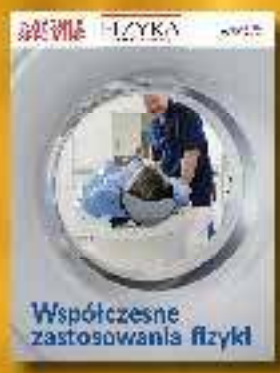
Fizyki w Szkole

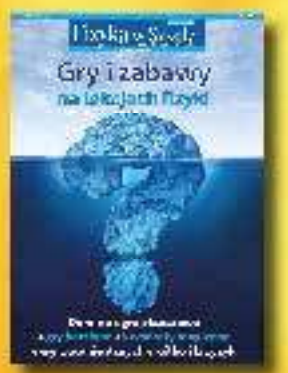
Tylko w wersji PDF!

Już od 10 zł!
Wysyłamy na adres mailowy!









Szczegóły i formularz zamówienia na www.aspress.com.pl/wydania-specjalne/

eprasa.pl 0593885dee